De sex första böckerna
af
Euclidis Elementa
jämte
planimetri och stereometri

utgifne af

P. R. Bråkenhielm

Örebro,

N. M. Lindhs Boktryckeri.
1844.

Förord till den digitala utgåvan

Detta är Projekt Runebergs digitala faksimilutgåva av P. R. Bråkenhielms svenska översättning från 1844 av Euklides *Elementa*. Den avbildade förlagan är tyvärr inte i bästa skick, med halvdåligt tryck och enstaka bläckplumpar. Titelsidan har namnteckningen C. (?) Ridderstad, vilket i Linköping är ett känt namn. Varje bokuppslag har avbildats som en TIFF-bild i 600 dpi svartvitt med dimensionerna 215 x 175 mm och återges på webben i 120 dpi gråskala.

Genom en långvarig erfarenhet bekant med följderna af de misstag, som i vårt Fädernesland äro alltför allmänna vid den första undervisningen uti Geometrien, tillåter jag mig den uppmaning till alla unga lärare och lärjungar, att samvetsgrant förklara och lära definitionerna framför hvarje bok, förr än man börjar med propositionerna, och vid hvarje proposition noga förklara dess hypothes och thes, förr än man försöker beviset.

De framföre definitionerna gifna "förklaringar öfver vetenskapsord" läsas med större nytta, sedan en del af första boken blifvit genomgången.

Carlberg i Sept. 1844.

P. R. Bråkenhielm.

Förklaring öfver vetenskapsord och tecken.

Med *Definition* förstås uppräknandet af alla de kännemärken, genom hvilka en sak kan skiljas från alla andra.

Proposition är en sats, uti hvilken man bekräftar eller nekar något, eller ock uti hvilken man föreställer, att något skall göras.

Af förra slaget äro *Axiom* och *Theorem,* af sednare slaget *Postulat* och *Problem.*

Axiom är en proposition, genom hvilken man bekräftar eller nekar något, och som af sig sjelf är så klar, att han ej behöfver bevisas.

Theorem är en proposition, som bekräftar eller nekar något, och som behöfver bevisas.

Uti hvarje Theorem och Axiom bör man urskilja *Hypothés* och *Thés.*

Hypothés är betingandet af vissa vilkor.

Thés är sjelfva den sats, som bekräftar eller nekar, till följe af de antagna vilkoren.

Understundom ligger hypothésen fördold, men finnes lätt genom omskrifning af propositionen. T. ex. prop. 5 uti 1:sta boken kan heta: *"Om en triangel är likbent,"* så äro vinklarne vid basen lika stora.

Bevis äro af tvenne slag:

1:o *Direct bevis* börjar alltid antingen med hypothésen ensam, eller med hypothésen i förening med någon *construction,* och slutar med Thésen.

2:o *Indirect bevis* börjar med en falsk hypothes, hvaraf man härleder en orimlighet, och slutar med propositionens Thés, såsom den enda möjliga.

Convertera en proposition är att taga thésen till hypothés, och hypothésen, eller någon del af hypothésen, till thés.

Uti 1:a boken äro propositionerna 6, 14, 19, 25, 29, 39, 40, 48 converterade af propositionerna 5, 13, 18, 24, 27 och 28, 37, 38, 47; och bevisen för de förra äro alla indirecta, utom för den 48:de.

Af propositioner, som föreställa att något skall göras är

Postulat en proposition, som föreställer, att något skall göras, som i verkligheten är omöjligt att åstadkomma; och

Problem är en proposition, som föreställer, att något skall göras, och som bevisar, huru det, med vilkor af de antagna postulaten, skall göras.

Corollarium är en proposition, som omedelbarligen följer af en annan proposition, eller af dess bevis.

Lemma är en proposition, som man endast tager till hjelp för beviset af en annan proposition.

Scholium
Då man vill beteckna, att en storhet A är lika stor med en annan storhet B, skrifver man A = B.

För att beteckna, att A är större än B, skrifver man A > B.

För att beteckna, att A är mindre än B, skrifver man A < B.

För att beteckna, att B skall adderas till A, skrifver man A + B.

Längre fram i boken antager man, att läsaren känner de första elementerna af Algebra.

*

Definitioner.

1. ***Punkt*** är det, som icke har några delar.

2. *Linea* är en längd utan bredd.

3. *Yttersta ändarne* af en linea äro punkter.

4. *Rät linea* är den, som ligger jämnt imellan sina punkter; så att hon icke böjer sig på något ställe.

5. *Yta* är det, som allenast har längd och bredd, men icke höjd eller tjocklek.

6. *Det yttersta* af en yta är lineer.

7. *Plan* är en yta, som ligger jämnt imellan de räta lineer, som uti henne kunna dragas.

8. *Vinkel* är den lutning, som tvänne lineer hafva till hvarandra, hvilka äro i samma plan, och råka hvarandra, men icke ligga uti en rät linea.

En vinkel benämnes med tre bokstäfver, den medlerst, som är vid spetsen; t. ex. vinkeln ABC (se följ. fig.). Om vid spetsen finnes blott en vinkel, kan han benämnas med blott en bokstaf.

9. *Rätlinig* vinkel är den, som omfattas af räta lineer.

10. När en rät linea står uppå en annan rät linea, så att vinklarne på båda sidor om henne äro lika stora, kallas hvar och en af dessa lika stora vinklar en *rät vinkel,* och den ena lineen säges vara *vinkelrät* emot den andra.

Om vinkeln EBC är lika stor med vinkeln EBD; så är vinkeln EBC en rät vinkel, och EBD en rät vinkel, samt lineen EB vinkelrät mot CD, och CD vinkelrät mot EB.

11. *Trubbig vinkel* är den, som är större än en rät; spetsig vinkel är den, som är mindre än en rät vinkel.

Vinkeln ABD, som är större än EBD, är trubbig; vinkeln ABC, som är mindre än EBC, är spetsig.

12. *Plan figur* är ett plan, inneslutet af en eller flera lineer.

13. *Cirkel* är en plan figur, som inneslutes af en linea, hvilken är så beskaffad, att alla räta lineer, som från en viss punkt uti figuren falla på henne, äro lika stora.

14. *Peripheri* kallas den krokiga lineen BCDE.

Radier kallas de lika stora räta lineerna AB, AC, AD.

Medelpunkt kallas den punkt A, från hvilken radierna dragas.

Diameter är en rät linea, som går genom medelpunkten, och hvars yttersta ändar äro på peripherien.

Diametern skär cirkeln midtitu.

15. *Halfcirkel* är en plan figur, som inneslutes af diametern och den delen af peripherien, som diametern afskär; t. ex. figuren BCD.16. *Båge* är en del af en cirkels peripheri, såsom BC, BCDE.

Man bör noga märka, att med cirkel förstås sjelfva ytan, som af peripherien inneslutes.

17. *Triangel* är en figur, som inneslutes af trenne lineer, *Fyrhörning,* som inneslutes af fyra lineer, *Femhörning, Sexhörning,* o. s. v., samt *månghörning,* som inneslutes af fem, sex, o. s. v. af flera lineer.

Sidor kallar man de lineer, som innesluta en yta; så att deraf uppkommer en figur.

18. *Rätliniga trianglar* eller *månghörningar,* äro plana figurer, hvilkas sidor äro räta lineer.

19. I anseende till sidorna är

Liksidig triangel den, som har tre lika stora sidor.

Likbent triangel den, som har två lika stora sidor.

Scalén, som har alla tre sidorna olika stora.

20. I anseende till vinklarna är

Rätvinklig triangel den, som har en rät vinkel.

Trubbvinklig, som har en trubbig vinkel.

Spetsvinklig, som har alla tre vinklarna spetsiga.

Med triangel förstås ej de tre sidorna, eller de tre vinklarna, utan sjelfva ytan; så att den ene triangeln är större än den andre, om den förres yta är större än den sednares yta.

21. Räta lineer kallas *Parallela,* om de äro i samma plan, och ej kunna råkas ehuru långt de än må utdragas.

22. *Parallelogram* är en plan figur, som inneslutes af fyra räta lineer, af hvilka de, som stå midt emot hvarandra äro parallela.

23. *Rhomb* är en parallelogram, uti hvilken alla sidorna äro lika stora.

24. *Rectangel* är en plan fyrsidig figur, uti hvilken alla vinklarne äro räta.

25. *Qvadrat* är en plan fyrsidig figur, som har alla sidorna lika stora och alla vinklarna räta.

Alla Qvadrater äro således rectanglar; och längre fram bevisas, att alla rectanglar äro parallelogrammer.

26. *Trapezium* kallas hvar och en fyrsidig figur, som ej är parallelogram.

27. *Diagonal* kallas en rät linea, som sammanbinder spetsarna af tvänne vinklar uti en figur.

POSTULAT.

1. Att från en gifven punkt draga en rät linea till en annan gifven punkt.

Detta kallar man ofta, att *sammanbinda* tvänne punkter.

2. Att utdraga en gifven rät linea så långt, man behagar.

3. Att taga en gifven punkt till medelpunkt, och upprita en cirkel, hvars peripheri går genom en annan gifven punkt.

Förmedelst lineal och passare verkställer man dessa trenne postulat, som ligga till grund för all praktisk Geometri, så noggrant, som vid hvarje tillfälle behöfves; men att *rita* en linea, rät eller krokig, är omöjligt; emedan en linea ej har bredd.

AXIOM.

1. De, som äro lika stora med ett och samma, eller med lika stora, äro sinsimellan lika stora.

2. Om man lägger lika stora till lika stora, så blifva de hela lika stora.

3. Om man tager lika stora från lika stora, så blifva de återstående lika stora.

4. Om man lägger lika stora till olika stora, så blifva de hela olika stora; den större, hvaruti den större är.

5. Om man tager lika stora från olika stora, så blifva de återstående olika stora; den större, som är återstående af

den större.

6. De, som äro dubbelt så stora som ett och samma, äro sinsimellan lika stora.

Äfvenså de, som äro tre, fyra, o. s. v. gånger så stora, som ett och samma, äro sinsimellan lika stora.

7. De, som äro halfparter af ett och samma, äro sinsimellan lika stora.

Äfvenså äro tredjeparter, fjerdeparter, o. s. v. af ett och samma, sinsimellan lika stora.

8. De, som till alla delar träffa in med hvarandra, äro lika stora.

9. Det hela är större, än hvar och en af sina delar.

10. Tvänne räta lineer kunna ej innesluta ett rum, eller formera en figur.

11. Alla räta vinklar äro lika stora Detta axiom är 10:de definitionen converterad. Hvar och en definition får converteras utan särskildt bevis; t. ex. def. 13. "Om radierna äro lika stora; så är figuren en cirkel;" och "om figuren är en cirkel, så äro radierna lika stora.".

12. Om en rät linea AB råkar tvänne räta lineer CD och EF, och gör de båda vinklarna DAB och ABF, som stå innantill på samma sida, tillhopatagna mindre än tvänne räta vinklar; så skola dessa båda räta lineer, CD och EF, råka hvarandra, om de utdragas åt D och F.

POSTULAT.

1. Att från en gifven punkt draga en rät linea till en annan gifven punkt.

Detta kallar man ofta, att *sammanbinda* tvänne punkter.

2. Att utdraga en gifven rät linea så långt, man behagar.

3. Att taga en gifven punkt till medelpunkt, och upprita en cirkel, hvars peripheri går genom en annan gifven punkt.

Förmedelst lineal och passare verkställer man dessa trenne postulat, som ligga till grund för all praktisk Geometri, så noggrant, som vid hvarje tillfälle behöfves; men att *rita* en linea, rät eller krokig, är omöjligt; emedan en linea ej har bredd.

AXIOM.

1. De, som äro lika stora med ett och samma, eller med lika stora, äro sinsimellan lika stora.

2. Om man lägger lika stora till lika stora, så blifva de hela lika stora.

3. Om man tager lika stora från lika stora, så blifva de återstående lika stora.

4. Om man lägger lika stora till olika stora, så blifva de hela olika stora; den större, hvaruti den större är.

5. Om man tager lika stora från olika stora, så blifva de återstående olika stora; den större, som är återstående af den större.

6. De, som äro dubbelt så stora som ett och samma, äro sinsimellan lika stora.

Äfvenså de, som äro tre, fyra, o. s. v. gånger så stora, som ett och samma, äro sinsimellan lika stora.

7. De, som äro halfparter af ett och samma, äro sinsimellan lika stora.

Äfvenså äro tredjeparter, fjerdeparter, o. s. v. af ett och samma, sinsimellan lika stora.

8. De, som till alla delar träffa in med hvarandra, äro lika stora.

9. Det hela är större, än hvar och en af sina delar.

10. Tvänne räta lineer kunna ej innesluta ett rum, eller formera en figur.

11. Alla räta vinklar äro lika stora Detta axiom är 10:de definitionen converterad. Hvar och en definition får converteras utan särskildt bevis; t. ex. def. 13. "Om radierna äro lika stora; så är figuren en cirkel;" och "om figuren är en cirkel, så äro radierna lika stora.".

12. Om en rät linea AB råkar tvänne räta lineer CD och EF, och gör de båda vinklarna DAB och ABF, som stå innantill på samma sida, tillhopatagna mindre än tvänne räta vinklar; så skola dessa båda räta lineer, CD och EF, råka hvarandra, om de utdragas åt D och F.

Detta axiom, som i sjelfva verket är en proposition, bevisas framdeles; då vi i stället antage, såsom af sig sjelft klart, att

Tvänne räta lineer, som skära hvarandra kunna ej båda vara parallela med en och samma tredje linea.

*

FÖRSTA BOKEN.

I. Proposition. Problem.

Att på en gifven rät linea, AB, upprita en liksidig triangel.

Tag A till medelpunkt och rita en cirkelperipheri DCB genom B, *a;* tag sedan B till medelpunkt och rita en peripheri ACE genom A; sammanbind punkterna A och B med den punkten C, hvarest båda peripherierna skära hvarandra, *b;* så är ABC den begärdta triangeln.

Bevis. Ty uti cirkeln DCB är radien

AC = AB, *c;*

och uti cirkeln ACE är radien BC = AB, *c;*

således äro AC och BC lika stora med en och samma AB; hvaraf följer, att AC = BC, *d;*

och alltså är triangeln liksidig, h. s. b.

a. postul. **3.** b. postul. **1.** c. defin. **13.** d. axiom. **1.**

II. Proposition. Problem.

Att från en gifven punkt draga en rät linea, som är lika stor med en gifven rät linea.

Låt A vara den gifna punkten och BC den gifna räta lineen. Drag från A till C en rät

Detta axiom, som i sjelfva verket är en proposition, bevisas framdeles; då vi i stället antage, såsom af sig sjelft klart, att

Tvänne räta lineer, som skära hvarandra kunna ej båda vara parallela med en och samma tredje linea.

*

FÖRSTA BOKEN.

I. Proposition. Problem.

Att på en gifven rät linea, AB, upprita en liksidig triangel.

Tag A till medelpunkt och rita en cirkelperipheri DCB genom B, *a;* tag sedan B till medelpunkt och rita en peripheri ACE genom A; sammanbind punkterna A och B med den punkten C, hvarest båda peripherierna skära hvarandra, *b;* så är ABC den begärdta triangeln.

Bevis. Ty uti cirkeln DCB är radien

AC = AB, *c;*

och uti cirkeln ACE är radien BC = AB, *c;*

således äro AC och BC lika stora med en och samma AB; hvaraf följer, att AC = BC, *d;*

och alltså är triangeln liksidig, h. s. b.

a. postul. **3.** b. postul. **1.** c. defin. **13.** d. axiom. **1.**

II. Proposition. Problem.

Att från en gifven punkt draga en rät linea, som är lika stor med en gifven rät linea.

Låt A vara den gifna punkten och BC den gifna räta lineen. Drag från A till C en rät

Detta axiom, som i sjelfva verket är en proposition, bevisas framdeles; då vi i stället antage, såsom af sig sjelft klart, att

Tvänne räta lineer, som skära hvarandra kunna ej båda vara parallela med en och samma tredje linea.

*

FÖRSTA BOKEN.

I. Proposition. Problem.

Att på en gifven rät linea, AB, upprita en liksidig triangel.

Tag A till medelpunkt och rita en cirkelperipheri DCB genom B, *a;* tag sedan B till medelpunkt och rita en peripheri ACE genom A; sammanbind punkterna A och B med den punkten C, hvarest båda peripherierna skära hvarandra, *b;* så är ABC den begärdta triangeln.

Bevis. Ty uti cirkeln DCB är radien

AC = AB, *c;*

och uti cirkeln ACE är radien BC = AB, *c;*

således äro AC och BC lika stora med en och samma AB; hvaraf följer, att AC = BC, *d;*

och alltså är triangeln liksidig, h. s. b.

a. postul. **3.** b. postul. **1.** c. defin. **13.** d. axiom. **1.**

II. Proposition. Problem.

Att från en gifven punkt draga en rät linea, som är lika stor med en gifven rät linea.

Låt A vara den gifna punkten och BC den gifna räta lineen. Drag från A till C en rät

linea AC, och upprita på henne en liksidig triangel, ADC, a; samt utdrag dess sidor DA och DC, b; tag sedan C till medelpunkt och rita peripherien BHE genom B, hvarigenom punkten E blifver gifven; och tag slutligen D till medelpunkt, och rita en peripheri genom E; så skall det bevisas, att AG = CB.

Bevis. Ty uti cirkeln FEG är radien DE = DG, c;

och uti den liksidiga triangeln DAC är DC = DA;

så att om man tager DC från DE, och DA från DG; så blifva de återstående CE = AG, eller AG = CE , d.

Men nu är uti cirkeln BEH radien CB = CE, c; derföre äro AG och CB lika stora med en och samma CE, och således AG = CB, e, h. s. b.

a. **1** prop. b. **2** post. c. **13** defin. d. **3** axiom. e. **1** axiom.

III Proposition. Problem.

Om tvänne olika stora räta lineer, AB och C, äro gifna, att skära af den större, AB, ett stycke, som är lika stort med den mindre C.

Drag från A en rät linea AD = C, a, och rita, med A till medelpunkt, en peripheri genom D; så är AE = C.

Bevis. Ty uti cirkeln FDE är radien AE = AD; men vi hafva gjort AD = C; derföre är AE = C, b; h. s. b.

a. **2** prop. b. *1* axiom.

IV Proposition. Theorem.

Om två sidor och mellanliggande vinkeln uti en triangel äro lika stora med hvar sin sida och mellanliggande vinkeln uti en annan triangel; så skola båda trianglarnes baser Då man vill utmärka en sida uti en triangel från de öfriga, kallar man henne triangelns bas. vara lika stora; de öfrige vinklarne uti den ena triangeln vara lika stora med hvar sin af de öfriga vinklarna uti den andra triangeln, som stå emot lika stora sidor; samt hela den ena triangeln vara lika stor med hela den andra triangeln.

Låt uti de båda trianglarna ABC, DEF sidorna AB = DE, och AC = DF, samt mellanliggande vinkeln A = D; så skall det bevisas, att basen BC = EF; att vinklarne ABC = DEF, som stå emot de lika stora sidorna AC och DF; att vinklarne ACB = DFE, som stå mot de lika stora sidorna AB och DE; samt att trianglarnes ytor ABC = DEF

linea AC, och upprita på henne en liksidig triangel, ADC, a; samt utdrag dess sidor DA och DC, b; tag sedan C till medelpunkt och rita peripherien BHE genom B, hvarigenom punkten E blifver gifven; och tag slutligen D till medelpunkt, och rita en peripheri genom E; så skall det bevisas, att AG = CB.

Bevis. Ty uti cirkeln FEG är radien DE = DG, c;

och uti den liksidiga triangeln DAC är DC = DA;

så att om man tager DC från DE, och DA från DG; så blifva de återstående CE = AG, eller AG = CE , d.

Men nu är uti cirkeln BEH radien CB = CE, c; derföre äro AG och CB lika stora med en och samma CE, och således AG = CB, e, h. s. b.

a. **1** prop. b. **2** post. c. **13** defin. d. **3** axiom. e. **1** axiom.

III Proposition. Problem.

Om tvänne olika stora räta lineer, AB och C, äro gifna, att skära af den större, AB, ett stycke, som är lika stort med den mindre C.

Drag från A en rät linea AD = C, a, och rita, med A till medelpunkt, en peripheri genom D; så är AE = C.

Bevis. Ty uti cirkeln FDE är radien AE = AD; men vi hafva gjort AD = C; derföre är AE = C, b; h. s. b.

a. **2** prop. b. *1* axiom.

IV Proposition. Theorem.

Om två sidor och mellanliggande vinkeln uti en triangel äro lika stora med hvar sin sida och mellanliggande vinkeln uti en annan triangel; så skola båda trianglarnes baser Då man vill utmärka en sida uti en triangel från de öfriga, kallar man henne triangelns bas. vara lika stora; de öfrige vinklarne uti den ena triangeln vara lika stora med hvar sin af de öfriga vinklarna uti den andra triangeln, som stå emot lika stora sidor; samt hela den ena triangeln vara lika stor med hela den andra triangeln.

Låt uti de båda trianglarna ABC, DEF sidorna AB = DE, och AC = DF, samt mellanliggande vinkeln A = D; så skall det bevisas, att basen BC = EF; att vinklarne ABC = DEF, som stå emot de lika stora sidorna AC och DF; att vinklarne ACB = DFE, som stå mot de lika stora sidorna AB och DE; samt att trianglarnes ytor ABC = DEF

linea AC, och upprita på henne en liksidig triangel, ADC, a; samt utdrag dess sidor DA och DC, b; tag sedan C till medelpunkt och rita peripherien BHE genom B, hvarigenom punkten E blifver gifven; och tag slutligen D till medelpunkt, och rita en peripheri genom E; så skall det bevisas, att AG = CB.

Bevis. Ty uti cirkeln FEG är radien DE = DG, c;

och uti den liksidiga triangeln DAC är DC = DA;

så att om man tager DC från DE, och DA från DG; så blifva de återstående CE = AG, eller AG = CE , d.

Men nu är uti cirkeln BEH radien CB = CE, c; derföre äro AG och CB lika stora med en och samma CE, och således AG = CB, e, h. s. b.

a. **1** prop. b. **2** post. c. **13** defin. d. **3** axiom. e. **1** axiom.

III Proposition. Problem.

Om tvänne olika stora räta lineer, AB och C, äro gifna, att skära af den större, AB, ett stycke, som är lika stort med den mindre C.

Drag från A en rät linea AD = C, a, och rita, med A till medelpunkt, en peripheri genom D; så är AE = C.

Bevis. Ty uti cirkeln FDE är radien AE = AD; men vi hafva gjort AD = C; derföre är AE = C, b; h. s. b.

a. **2** prop. b. *1* axiom.

IV Proposition. Theorem.

Om två sidor och mellanliggande vinkeln uti en triangel äro lika stora med hvar sin sida och mellanliggande vinkeln uti en annan triangel; så skola båda trianglarnes baser Då man vill utmärka en sida uti en triangel från de öfriga, kallar man henne triangelns bas. vara lika stora; de öfrige vinklarne uti den ena triangeln vara lika stora med hvar sin af de öfriga vinklarna uti den andra triangeln, som stå emot lika stora sidor; samt hela den ena triangeln vara lika stor med hela den andra triangeln.

Låt uti de båda trianglarna ABC, DEF sidorna AB = DE, och AC = DF, samt mellanliggande vinkeln A = D; så skall det bevisas, att basen BC = EF; att vinklarne ABC = DEF, som stå emot de lika stora sidorna AC och DF; att vinklarne ACB = DFE, som stå mot de lika stora sidorna AB och DE; samt att trianglarnes ytor ABC = DEF

Bevis. Om man lägger triangeln ABC på triangeln DEF, så att punkten A faller på D, och AB faller utefter DE; så måste AC falla utefter DF; emedan vinklarne A och D äro antagne vara lika stora.

Punkten B måste då falla på E och C på F; emedan vi antagit, att AB = DE, och att AC = DF.

Om nu basen BC fölle såsom EGF, så skulle tvänne räta lineer kunna innesluta en figur, hvilket är omöjligt, a; således måste basen BC till alla delar träffa in med basen EF, och till följe deraf BC = EF, b. h. s. b.

a. 10 axiom. b. 8 axiom.

Vinkeln B måste också träffa in med vinkeln E, och vinkeln C med F, hvadan

B = E och C = F, b. h. s. b.

Och då hela den ena triangelns yta till alla delar träffar in med den andra triangelns yta; så äro äfven trianglarne

ABC = DEF, b. h. s. b.

V Proposition. Theorem.

De vinklar, som stå vid basen uti en likbent triangel, äro lika stora; och om man utdrager de tvänne lika stora sidorna, så blifva vinklarne nedanför basen lika stora.

Låt uti triangeln ABC sidan AB = AC så skall det bevisas, att vinkeln ABC = ACB, och låt AB och AC vara utdragna; så skall det bevisas, att vinkeln DBC = ECB.

Tag en punkt D på AB nedanför basen, gör AE = AD, a; sammanbind B och E, samt C och D.

Bevis. Uti de båda trianglarna ABE och och ACD äro tvänne sidor AB och AE samt mellanliggande vinkeln A, uti den ena, lika stora med hvar sin sida AC och AD samt mellanliggande vinkeln A, uti den andra triangeln; derföre måste basen BE = CD, b och vinklarne ABE = ACD, som stå emot de lika stora sidorna AD och AE, b; samt vinklarne AEB=ADC, som stå emot de lika stora sidorna AB och AC, b,

Då vidare vi hafve gjort AD=AE, och antagit, att AB = AC; så måste BD = CE, c.

a. 3 prop. b. 4 prop. c. 3 axiom.

Alltså hafve vi åter uti de båda trianglarna ECB och DBC tvänne sidor CE och BE samt mellanliggande vinkeln E, uti den ena, lika stora med hvar sin sida BD och CD samt mellanliggande vinkeln D uti den andra triangeln; derföre måste vinklarne EBC = DCB, som stå emot den gemensamma sidan BC, b och vinklarne ECB = DBC, som stå emot de lika stora sidorna BE och CD, b; h. s. b.

Nu är det således bevist, att vinklarna ABE = ACD,

Bevis. Om man lägger triangeln ABC på triangeln DEF, så att punkten A faller på D, och AB faller utefter DE; så måste AC falla utefter DF; emedan vinklarne A och D äro antagne vara lika stora.

Punkten B måste då falla på E och C på F; emedan vi antagit, att AB = DE, och att AC = DF.

Om nu basen BC fölle såsom EGF, så skulle tvänne räta lineer kunna innesluta en figur, hvilket är omöjligt, a; således måste basen BC till alla delar träffa in med basen EF, och till följe deraf BC = EF, b. h. s. b.

a. 10 axiom. b. 8 axiom.

Vinkeln B måste också träffa in med vinkeln E, och vinkeln C med F, hvadan

B = E och C = F, b. h. s. b.

Och då hela den ena triangelns yta till alla delar träffar in med den andra triangelns yta; så äro äfven trianglarne

ABC = DEF, b. h. s. b.

V Proposition. Theorem.

De vinklar, som stå vid basen uti en likbent triangel, äro lika stora; och om man utdrager de tvänne lika stora sidorna, så blifva vinklarne nedanför basen lika stora.

Låt uti triangeln ABC sidan AB = AC så skall det bevisas, att vinkeln ABC = ACB, och låt AB och AC vara utdragna; så skall det bevisas, att vinkeln DBC = ECB.

Tag en punkt D på AB nedanför basen, gör AE = AD, a; sammanbind B och E, samt C och D.

Bevis. Uti de båda trianglarna ABE och och ACD äro tvänne sidor AB och AE samt mellanliggande vinkeln A,

uti den ena, lika stora med hvar sin sida AC och AD samt mellanliggande vinkeln A, uti den andra triangeln; derföre måste basen BE = CD, b och vinklarne ABE = ACD, som stå emot de lika stora sidorna AD och AE, b; samt vinklarne AEB=ADC, som stå emot de lika stora sidorna AB och AC, b,

Då vidare vi hafve gjort AD=AE, och antagit, att AB = AC; så måste BD = CE, c.

a. 3 prop. b. 4 prop. c. 3 axiom.

Alltså hafve vi åter uti de båda trianglarna ECB och DBC tvänne sidor CE och BE samt mellanliggande vinkeln E, uti den ena, lika stora med hvar sin sida BD och CD samt mellanliggande vinkeln D uti den andra triangeln; derföre måste vinklarne EBC = DCB, som stå emot den gemensamma sidan BC, b och vinklarne ECB = DBC, som stå emot de lika stora sidorna BE och CD, b; h. s. b.

Nu är det således bevist, att vinklarna ABE = ACD,

och att vinklarne EBC = DCB; tager man då vinkeln EBC från ABE, och DCB från ACD; så måste de återstående vinklarne

ABC = ACB, c; h. s. b.

<sp<Corollarium. *Uti en liksidig triangel äro alla vinklarne lika stora.*

VI Proposition. Theorem.<(b>

Om tvänne vinklar uti en triangel äro lika stora; så äro de sidor, som stå emot dem, lika stora.

Låt vinkeln ABC = ACB; så skall det bevisas, att AB = AC

Bevis.<(sp> Ty om icke AB = AC, så låt DB = AC, och drag DC.

Uti de båda trianglarna ACB och DBC äro då tvänne sidor AC och CB samt mellanliggande vinkeln ACB, uti den ena, lika stora med hvar sin sida DB och BC samt mellanliggande vinkeln DBC uti den andra, derföre måste triangeln ABC = DBC, a, en del med sitt hela; hvilket är omöjligt, b; således kan icke DB = AC.

På lika sätt bevises, att ingen annan del af AB är lika stor med AC; således är AB icke större än AC.

På lika sätt bevises, att AC icke är större än AB, eller att AB icke är mindre än AC; och då således AB hvarken är större eller mindre än AC; så måste AB = AC; h. s. b.

a. 4 prop. b. 9 axiom.

Corollarium. ***Om alla tre vinklarne uti en triangel äro lika stora, så är triangeln liksidig.***

VII Proposition. Theorem.

Om fyra räta lineer stå på samma räta linea, på samma sida om henne, och två och två af dem hafva samma ändar och äro lika stora; så kunna de icke ställas i hop uti åtskiljda punkter.

Låt AD, AC, BE, BF vara fyra räta lineer, som alla äro på samma sida om räta lineen AB:

låt AD och AC vara lika stora och hafva samma ända A, och låt BE och BF vara lika stora och hafva samma ända B:

låt slutligen AC och BE vara ihopställda i punkten G; så att AG = AC och BG = BE; så skall det bevisas, att AD och BF icke kunna ställas ihop i någon annan punkt, än G.

Bevis.
Emedan det är antaget, att AD = AC; så måste AH = AG och AGH en likbent triangel; och af lika skäl blifver BGH en likbent triangel. Uti den likbenta triangeln AGH äro således vinkeln

AHG = AGH, a; men vinkeln BGH > AGH, b; således är BGH >AHG, och ännu mer BGH >BHG.

a. 5 prop. b. 9 axiom.

Deremot måste, uti den likbenta triangeln BGH, vinkeln BGH = BHG, a; och således skulle

och att vinklarne EBC = DCB; tager man då vinkeln EBC från ABE, och DCB från ACD; så måste de återstående vinklarne

ABC = ACB, c; h. s. b.

<sp<Corollarium. *Uti en liksidig triangel äro alla vinklarne lika stora.*

VI Proposition. Theorem.<(b>

Om tvänne vinklar uti en triangel äro lika stora; så äro de sidor, som stå emot dem, lika stora.

Låt vinkeln ABC = ACB; så skall det bevisas, att AB = AC

Bevis.<(sp> Ty om icke AB = AC, så låt DB = AC, och drag DC.

Uti de båda trianglarna ACB och DBC äro då tvänne sidor AC och CB samt mellanliggande vinkeln ACB, uti den ena, lika stora med hvar sin sida DB och BC samt mellanliggande vinkeln DBC uti den andra, derföre måste triangeln ABC = DBC, a, en del med sitt hela; hvilket är omöjligt, b; således kan icke DB = AC.

På lika sätt bevises, att ingen annan del af AB är lika stor med AC; således är AB icke större än AC.

På lika sätt bevises, att AC icke är större än AB, eller att AB icke är mindre än AC; och då således AB hvarken är större eller mindre än AC; så måste AB = AC; h. s. b.

a. 4 prop. b. 9 axiom.

Corollarium. ***Om alla tre vinklarne uti en triangel äro lika stora, så är triangeln liksidig.***

VII Proposition. Theorem.

Om fyra räta lineer stå på samma räta linea, på samma sida om henne, och två och två af dem hafva samma ändar och äro lika stora; så kunna de icke ställas i hop uti åtskiljda punkter.

Låt AD, AC, BE, BF vara fyra räta lineer, som alla äro på samma sida om räta lineen AB:

låt AD och AC vara lika stora och hafva samma ända A, och låt BE och BF vara lika stora och hafva samma ända B:

låt slutligen AC och BE vara ihopställda i punkten G; så att AG = AC och BG = BE; så skall det bevisas, att AD och BF icke kunna ställas ihop i någon annan punkt, än G.

Bevis.
Emedan det är antaget, att AD = AC; så måste AH = AG och AGH en likbent triangel; och af lika skäl blifver BGH en likbent triangel. Uti den likbenta triangeln AGH äro således vinkeln

AHG = AGH, a; men vinkeln BGH > AGH, b; således är BGH >AHG, och ännu mer BGH >BHG.

a. 5 prop. b. 9 axiom.

Deremot måste, uti den likbenta triangeln BGH, vinkeln BGH = BHG, a; och således skulle

och att vinklarne EBC = DCB; tager man då vinkeln EBC från ABE, och DCB från ACD; så måste de återstående vinklarne

ABC = ACB, c; h. s. b.

<sp<Corollarium. *Uti en liksidig triangel äro alla vinklarne lika stora.*

VI Proposition. Theorem.<(b>

Om tvänne vinklar uti en triangel äro lika stora; så äro de sidor, som stå emot dem, lika stora.

Låt vinkeln ABC = ACB; så skall det bevisas, att AB = AC

Bevis.<(sp> Ty om icke AB = AC, så låt DB = AC, och drag DC.

Uti de båda trianglarna ACB och DBC äro då tvänne sidor AC och CB samt mellanliggande vinkeln ACB, uti den ena, lika stora med hvar sin sida DB och BC samt mellanliggande vinkeln DBC uti den andra, derföre måste triangeln ABC = DBC, a, en del med sitt hela; hvilket är omöjligt, b; således kan icke DB = AC.

På lika sätt bevises, att ingen annan del af AB är lika stor med AC; således är AB icke större än AC.

På lika sätt bevises, att AC icke är större än AB, eller att AB icke är mindre än AC; och då således AB hvarken är större eller mindre än AC; så måste AB = AC; h. s. b.

a. 4 prop. b. 9 axiom.

Corollarium. ***Om alla tre vinklarne uti en triangel äro lika stora, så är triangeln liksidig.***

VII Proposition. Theorem.

Om fyra räta lineer stå på samma räta linea, på samma sida om henne, och två och två af dem hafva samma ändar och äro lika stora; så kunna de icke ställas i hop uti åtskiljda punkter.

Låt AD, AC, BE, BF vara fyra räta lineer, som alla äro på samma sida om räta lineen AB:

låt AD och AC vara lika stora och hafva samma ända A, och låt BE och BF vara lika stora och hafva samma ända B:

låt slutligen AC och BE vara ihopställda i punkten G; så att AG = AC och BG = BE; så skall det bevisas, att AD och BF icke kunna ställas ihop i någon annan punkt, än G.

Bevis.
Emedan det är antaget, att AD = AC; så måste AH = AG och AGH en likbent triangel; och af lika skäl blifver BGH en likbent triangel. Uti den likbenta triangeln AGH äro således vinkeln

AHG = AGH, a; men vinkeln BGH > AGH, b; således är BGH >AHG, och ännu mer BGH >BHG.

a. 5 prop. b. 9 axiom.

Deremot måste, uti den likbenta triangeln BGH, vinkeln BGH = BHG, a; och således skulle

vinkeln BGH på samma gång vara större än, och lika stor med vinkeln BHG, hvilket är omöjligt. Alltså kunna icke AD och BF vara ihopställda uti punkten H; och på samma sätt bevises, att AD och BF icke kunna ställas ihop uti någon annan punkt utanför triangeln AGB.

Låt, om det vore möjligt, AD och BF vara ihopställda uti punkten H inuti triangeln AGB; och drag räta lineen GH, och utdrag AG och AH.

Då skulle äfvenledes AGH och BGH vara likbenta trianglar, och således vinklarne nedanföre basen lika stora, nämligen vinkeln

KGH = LHG, a; men vinkeln BHG > LHG, b; således är BHG > KGH; och ännu mer BHG > BGH.

Deremot måste uti den likbenta triangeln BGH vinkeln BHG = BGH, a; och således skulle vinkeln BHG på samma gång, vara större än, och lika stor med vinkeln BGH, hvilket är omöjligt. Alltså kunna icke AD och BF vara ihopställda uti punkten H; och på samma sätt bevises, att AD och BF icke kunna ställas ihop uti någon annan punkt inuti triangeln ABG.

Låt slutligen, om det vore möjligt, AD och BF vara ihopställda uti punkten H på en af sidorna uti triangeln AGB.

Då skulle BG = BH, och som äfven detta är omöjligt; så följer, att AD och BF hvarken kunna ställas ihop uti någon punkt utom eller inom triangeln AGB, ej heller uti någon annan punkt på denna triangels sidor, än uti punkten G; h. s. b.

VIII Proposition. Theorem.

Om två sidor uti en triangel äro lika stora med hvar sin sida uti en annan triangel, och basen är lika stor med basen; så skall den mellanliggande vinkeln uti den ena triangeln vara lika stor med mellanliggande vinkeln uti den andra triangeln.

Låt uti trianglarna ABC, DEF AB = DE, BC = EF och AC = DF; så skall det bevisas, att vinkeln ABC = DEF.

Bevis. Ty om triangeln ABC lägges på triangeln DEF; så att punkten A faller på D, och C på F; så kunna icke de räta lineerna AB och CB ställas ihop uti någon annan punkt, än E, a; hvarföre vinkeln B måste till alla delar träffa in med vinkeln E, och således vara lika stor med honom, b; h. s. b.

a. **7** prop. b. **8 axiom.**

Corollarium. *Om alla tre sidorna uti en triangel äro lika stora med hvar sin sida uti en annan triangel, så äro alla vinklarne uti den ena lika stora med hvar sin vinkel uti den andra, som stå emot lika stora sidor, och triangeln är lika stor med triangeln (prop. 4).*

vinkeln BGH på samma gång vara större än, och lika stor med vinkeln BHG, hvilket är omöjligt. Alltså kunna icke AD och BF vara ihopställda uti punkten H; och på samma sätt bevises, att AD och BF icke kunna ställas ihop uti någon annan punkt utanför triangeln AGB.

Låt, om det vore möjligt, AD och BF vara ihopställda uti punkten H inuti triangeln AGB; och drag räta lineen GH, och utdrag AG och AH.

Då skulle äfvenledes AGH och BGH vara likbenta trianglar, och således vinklarne nedanföre basen lika stora, nämligen vinkeln

KGH = LHG, a; men vinkeln BHG > LHG, b; således är BHG > KGH; och ännu mer BHG > BGH.

Deremot måste uti den likbenta triangeln BGH vinkeln BHG = BGH, a; och således skulle vinkeln BHG på samma gång, vara större än, och lika stor med vinkeln BGH, hvilket är omöjligt. Alltså kunna icke AD och BF vara ihopställda uti punkten H; och på samma sätt bevises, att AD och BF icke kunna ställas ihop uti någon annan punkt inuti triangeln ABG.

Låt slutligen, om det vore möjligt, AD och BF vara ihopställda uti punkten H på en af sidorna uti triangeln AGB.

Då skulle BG = BH, och som äfven detta är omöjligt; så följer, att AD och BF hvarken kunna ställas ihop uti någon punkt utom eller inom triangeln AGB, ej heller uti någon annan punkt på denna triangels sidor, än uti punkten G; h. s. b.

VIII Proposition. Theorem.

Om två sidor uti en triangel äro lika stora med hvar sin sida uti en annan triangel, och basen är lika stor med basen; så skall den mellanliggande vinkeln uti den ena triangeln vara lika stor med mellanliggande vinkeln uti den andra triangeln.

Låt uti trianglarna ABC, DEF AB = DE, BC = EF och AC = DF; så skall det bevisas, att vinkeln ABC = DEF.

Bevis. Ty om triangeln ABC lägges på triangeln DEF; så att punkten A faller på D, och C på F; så kunna icke de räta lineerna AB och CB ställas ihop uti någon annan punkt, än E, a; hvarföre vinkeln B måste till alla delar träffa in med vinkeln E, och således vara lika stor med honom, b; h. s. b.

a. **7** prop. b. **8 axiom.**

Corollarium. *Om alla tre sidorna uti en triangel äro lika stora med hvar sin sida uti en annan triangel, så äro*

alla vinklarne uti den ena lika stora med hvar sin vinkel uti den andra, som stå emot lika stora sidor, och triangeln är lika stor med triangeln (prop. 4).

IX Proposition. Problem.

Att skära en gifven rätlinig vinkel BAC midtitu.

Gör AD = AE, a; sammanbind D och E, och upprita den liksidiga triangeln DFE, b; samt drag räta lineen AF; så skall det bevisas, att vinkeln DAF = EAF.

Bevis. Ty då AD = AE, AF = AF och basen DF = EF, c; så måste mellanliggande vinkeln DAF = EAF, d; h. s. b.

a. **3** prop. b. **1** prop. c. **19** defin. d. **8** prop.

X Proposition. Problem.

Att skära en gifven rät linea, AB, midtitu.

Rita på AB en liksidig triangel ACB, a; skär vinkeln ACB midtitu, b, så att vinkeln ACD =BCD; så skall det bevisas, att AD = BD.

a. **1** prop. b. **9** prop. c. **4** prop.

Bevis. Ty AC = BC, och CD = CD, och mellanliggande vinkeln ACD = BCD; derföre måste basen AD = BD, c; h. s. b.

XI Proposition. Problem.

Att från en gifven punkt C , på en rät linea AB, draga en rät linea, som gör räta vinklar med henne.

Gör CD = CB, a; rita på DB liksidiga triangeln DEB, b; sammanbind E och C; så skall det bevisas, att EC är vinkelrät mot AB, eller att vinkeln ECD=ECB, c.

Bevis. Ty CD = CB, och CE = CE, ocb basen DE = BE; derföre måste mellanliggande vinkeln ECD = ECB, d; h. s. b.

a. **3** prop. b. **1** Prop. c. **10** defin. d. **8** prop.

XII Proposition. Problem.

Att från en gifven punkt, C, utom en gifven, odeterminerad , rät linea AB, draga en rät linea, som är vinkelrät mot henne.

Tag en punkt G på andra sidan om AB i anseende till C , och rita en peripheri genom G med C såsom medelpunkt; skär sedan EF midtitu uti D, a; och sammanbind C med D; så skall det bevisas, att CD är vinkelrät mot AB; eller att vinkeln EDC = FDC b.

a. 10 prop. b. 10 defin. c. 8 prop.

Bevis. Sammanbind C med E och C med F. Emedan DE = DF, och DC = DC, samt

IX Proposition. Problem.

Att skära en gifven rätlinig vinkel BAC midtitu.

Gör AD = AE, a; sammanbind D och E, och upprita den liksidiga triangeln DFE, b; samt drag räta lineen AF; så skall det bevisas, att vinkeln DAF = EAF.

Bevis. Ty då AD = AE, AF = AF och basen DF = EF, c; så måste mellanliggande vinkeln DAF = EAF, d; h. s. b.

a. **3** prop. b. **1** prop. c. **19** defin. d. **8** prop.

X Proposition. Problem.

Att skära en gifven rät linea, AB, midtitu.

Rita på AB en liksidig triangel ACB, a; skär vinkeln ACB midtitu, b, så att vinkeln ACD =BCD; så skall det bevisas, att AD = BD.

a. **1** prop. b. **9** prop. c. **4** prop.

Bevis. Ty AC = BC, och CD = CD, och mellanliggande vinkeln ACD = BCD; derföre måste basen AD = BD, c; h. s. b.

XI Proposition. Problem.

Att från en gifven punkt C , på en rät linea AB, draga en rät linea, som gör räta vinklar med henne.

Gör CD = CB, a; rita på DB liksidiga triangeln DEB, b; sammanbind E och C; så skall det bevisas, att EC är vinkelrät mot AB, eller att vinkeln ECD=ECB, c.

Bevis. Ty CD = CB, och CE = CE, ocb basen DE = BE; derföre måste mellanliggande vinkeln ECD = ECB, d; h. s. b.

a. **3** prop. b. **1** Prop. c. **10** defin. d. **8** prop.

XII Proposition. Problem.

Att från en gifven punkt, C, utom en gifven, odeterminerad , rät linea AB, draga en rät linea, som är vinkelrät mot henne.

Tag en punkt G på andra sidan om AB i anseende till C , och rita en peripheri genom G med C såsom medelpunkt; skär sedan EF midtitu uti D, a; och sammanbind C med D; så skall det bevisas, att CD är vinkelrät mot AB; eller att vinkeln EDC = FDC b.

a. 10 prop. b. 10 defin. c. 8 prop.

Bevis. Sammanbind C med E och C med F. Emedan DE = DF, och DC = DC, samt

IX Proposition. Problem.

Att skära en gifven rätlinig vinkel BAC midtitu.

Gör AD = AE, a; sammanbind D och E, och upprita den liksidiga triangeln DFE, b; samt drag räta lineen AF; så skall det bevisas, att vinkeln DAF = EAF.

Bevis. Ty då AD = AE, AF = AF och basen DF = EF, c; så måste mellanliggande vinkeln DAF = EAF, d; h. s. b.

a. **3** prop. b. **1** prop. c. **19** defin. d. **8** prop.

X Proposition. Problem.

Att skära en gifven rät linea, AB, midtitu.

Rita på AB en liksidig triangel ACB, a; skär vinkeln ACB midtitu, b, så att vinkeln ACD =BCD; så skall det bevisas, att AD = BD.

a. **1** prop. b. **9** prop. c. **4** prop.

Bevis. Ty AC = BC, och CD = CD, och mellanliggande vinkeln ACD = BCD; derföre måste basen AD = BD, c; h. s. b.

XI Proposition. Problem.

Att från en gifven punkt C , på en rät linea AB, draga en rät linea, som gör räta vinklar med henne.

Gör CD = CB, a; rita på DB liksidiga triangeln DEB, b; sammanbind E och C; så skall det bevisas, att EC är vinkelrät mot AB, eller att vinkeln ECD=ECB, c.

Bevis. Ty CD = CB, och CE = CE, ocb basen DE = BE; derföre måste mellanliggande vinkeln ECD = ECB, d; h.

s. b.

a. **3** prop. b. **1** Prop. c. **10** defin. d. **8** prop.

XII Proposition. Problem.

Att från en gifven punkt, C, utom en gifven, odeterminerad , rät linea AB, draga en rät linea, som är vinkelrät mot henne.

Tag en punkt G på andra sidan om AB i anseende till C , och rita en peripheri genom G med C såsom medelpunkt; skär sedan EF midtitu uti D, a; och sammanbind C med D; så skall det bevisas, att CD är vinkelrät mot AB; eller att vinkeln EDC = FDC b.

a. 10 prop. b. 10 defin. c. 8 prop.

Bevis. Sammanbind C med E och C med F. Emedan DE = DF, och DC = DC, samt

IX Proposition. Problem.

Att skära en gifven rätlinig vinkel BAC midtitu.

Gör AD = AE, a; sammanbind D och E, och upprita den liksidiga triangeln DFE, b; samt drag räta lineen AF; så skall det bevisas, att vinkeln DAF = EAF.

Bevis. Ty då AD = AE, AF = AF och basen DF = EF, c; så måste mellanliggande vinkeln DAF = EAF, d; h. s. b.

a. **3** prop. b. **1** prop. c. **19** defin. d. **8** prop.

X Proposition. Problem.

Att skära en gifven rät linea, AB, midtitu.

Rita på AB en liksidig triangel ACB, a; skär vinkeln ACB midtitu, b, så att vinkeln ACD =BCD; så skall det bevisas, att AD = BD.

a. **1** prop. b. **9** prop. c. **4** prop.

Bevis. Ty AC = BC, och CD = CD, och mellanliggande vinkeln ACD = BCD; derföre måste basen AD = BD, c; h. s. b.

XI Proposition. Problem.

Att från en gifven punkt C , på en rät linea AB, draga en rät linea, som gör räta vinklar med henne.

Gör CD = CB, a; rita på DB liksidiga triangeln DEB, b; sammanbind E och C; så skall det bevisas, att EC är vinkelrät mot AB, eller att vinkeln ECD=ECB, c.

Bevis. Ty CD = CB, och CE = CE, ocb basen DE = BE; derföre måste mellanliggande vinkeln ECD = ECB, d; h. s. b.

a. **3** prop. b. **1** Prop. c. **10** defin. d. **8** prop.

XII Proposition. Problem.

Att från en gifven punkt, C, utom en gifven, odeterminerad , rät linea AB, draga en rät linea, som är vinkelrät mot henne.

Tag en punkt G på andra sidan om AB i anseende till C , och rita en peripheri genom G med C såsom medelpunkt; skär sedan EF midtitu uti D, a; och sammanbind C med D; så skall det bevisas, att CD är vinkelrät mot AB; eller att vinkeln EDC = FDC b.

a. 10 prop. b. 10 defin. c. 8 prop.

Bevis. Sammanbind C med E och C med F. Emedan DE = DF, och DC = DC, samt

basen EC = FC, emedan de äro radier i samma cirkel; så måste mellanliggande vinkeln EDC = FDC, c; h. s. b.

XIII Proposition. Theorem.

Då tvänne räta lineer skära hvarandra; äro de vinklar, som ligga bredvid hvarandra, tillhopatagne lika stora med tvänne räta vinklar.

Låt räta lineerna AB och CD skära hvarandra uti B; så skall det bevisas, att vinklarne ABC + ABD äro lika stora med tvänne räta.

Bevis. Drag BE vinkelrät emot CD, a; så att

EBD + EBC = tvänne räta vinklar.

Nu är vinkeln [E]BC = ABC + EBA; så ### [att?] E[BD] + EBC = ABC + EBA, b, [då] man nämligen lägger vinkeln EBD till på båda ställen.

a. **11** prop. b. **2** axiom. c. **1** axiom. Likaledes är vinkeln ABD = EBA + EBD; så att ABC + ABD = ABC + EBA + EBD, b, då man nämligen lägger vinkeln ABC till på båda ställen.

Nu äro således vinklarne EBD + EBC och vinklarne .. ABC + ABD lika stora med ett och samma, nämligen med alla tre vinklarne ABC + EBA + EBD; således måste EBD + EBC = ABC + ABD, c. Men ... EBD + EBC = tvänne räta vinklar; derföre måste äfven ABC + ABD = tvänne räta vinklar, c; h. s. b.

Om AB sjelf vore vinkelrät mot CD; så är af sig sjelft klart, att vinklarne ABC + ABD vore tillsammantagne lika stora med tvänne räta vinklar.

XIV Proposition. Theorem.

Om tvänne räta lineer äro på hvar sin sida om en annan rät linea, och råka henne uti en punkt, så att de vinklar, som ligga bredvid hvarandra, äro tillsammantagne lika stora med tvänne räta; så skola dessa båda lineer vara uti en rät linea.

Låt räta lineerna BC, BD vara på hvar sin sida om AB, och råka AB uti samma punkt B; och låt vinklarne ABC och ABD vara tillhopa lika med tvänne räta; så skall det bevisas, att CB och BD äro uti en rät linea.

Bevis. Ty om icke så är, så låt BE vara uti rät linea med CB a. Emedan då CBE är *en* rät linea, så måste vinklarne ABC + ABE = tvänne räta b; men det är antaget, att äfven vinklarne ABC + ABD = tvänne räta, och derföre skulle vinklarne

ABC + ABE = ABC + ABD, c;

a. **2** postul. b. **13** prop. c. **1** axiom. d. **3** axiom.

basen EC = FC, emedan de äro radier i samma cirkel; så måste mellanliggande vinkeln EDC = FDC, c; h. s. b.

XIII Proposition. Theorem.

Då tvänne räta lineer skära hvarandra; äro de vinklar, som ligga bredvid hvarandra, tillhopatagne lika stora med tvänne räta vinklar.

Låt räta lineerna AB och CD skära hvarandra uti B; så skall det bevisas, att vinklarne ABC + ABD äro lika stora med tvänne räta.

Bevis. Drag BE vinkelrät emot CD, a; så att

EBD + EBC = tvänne räta vinklar.

Nu är vinkeln [E]BC = ABC + EBA; så ### [att?] E[BD] + EBC = ABC + EBA, b, [då] man nämligen lägger vinkeln EBD till på båda ställen.

a. **11** prop. b. **2** axiom. c. **1** axiom. Likaledes är vinkeln ABD = EBA + EBD; så att ABC + ABD = ABC + EBA

+ EBD, b, då man nämligen lägger vinkeln ABC till på båda ställen.

Nu äro således vinklarne EBD + EBC och vinklarne .. ABC + ABD lika stora med ett och samma, nämligen med alla tre vinklarne ABC + EBA + EBD; således måste EBD + EBC = ABC + ABD, c. Men ... EBD + EBC = tvänne räta vinklar; derföre måste äfven ABC + ABD = tvänne räta vinklar, c; h. s. b.

Om AB sjelf vore vinkelrät mot CD; så är af sig sjelft klart, att vinklarne ABC + ABD vore tillsammantagne lika stora med tvänne räta vinklar.

XIV Proposition. Theorem.

Om tvänne räta lineer äro på hvar sin sida om en annan rät linea, och råka henne uti en punkt, så att de vinklar, som ligga bredvid hvarandra, äro tillsammantagne lika stora med tvänne räta; så skola dessa båda lineer vara uti en rät linea.

Låt räta lineerna BC, BD vara på hvar sin sida om AB, och råka AB uti samma punkt B; och låt vinklarne ABC och ABD vara tillhopa lika med tvänne räta; så skall det bevisas, att CB och BD äro uti en rät linea.

Bevis. Ty om icke så är, så låt BE vara uti rät linea med CB a. Emedan då CBE är *en* rät linea, så måste vinklarne ABC + ABE = tvänne räta b; men det är antaget, att äfven vinklarne ABC + ABD = tvänne räta, och derföre skulle vinklarne

ABC + ABE = ABC + ABD, c;

a. **2** postul. b. **13** prop. c. **1** axiom. d. **3** axiom.

basen EC = FC, emedan de äro radier i samma cirkel; så måste mellanliggande vinkeln EDC = FDC, c; h. s. b.

XIII Proposition. Theorem.

Då tvänne räta lineer skära hvarandra; äro de vinklar, som ligga bredvid hvarandra, tillhopatagne lika stora med tvänne räta vinklar.

Låt räta lineerna AB och CD skära hvarandra uti B; så skall det bevisas, att vinklarne ABC + ABD äro lika stora med tvänne räta.

Bevis. Drag BE vinkelrät emot CD, a; så att

EBD + EBC = tvänne räta vinklar.

Nu är vinkeln [E]BC = ABC + EBA; så ### [att?] E[BD] + EBC = ABC + EBA, b, [då] man nämligen lägger vinkeln EBD till på båda ställen.

a. **11** prop. b. **2** axiom. c. **1** axiom. Likaledes är vinkeln ABD = EBA + EBD; så att ABC + ABD = ABC + EBA + EBD, b, då man nämligen lägger vinkeln ABC till på båda ställen.

Nu äro således vinklarne EBD + EBC och vinklarne .. ABC + ABD lika stora med ett och samma, nämligen med alla tre vinklarne ABC + EBA + EBD; således måste EBD + EBC = ABC + ABD, c. Men ... EBD + EBC = tvänne räta vinklar; derföre måste äfven ABC + ABD = tvänne räta vinklar, c; h. s. b.

Om AB sjelf vore vinkelrät mot CD; så är af sig sjelft klart, att vinklarne ABC + ABD vore tillsammantagne lika stora med tvänne räta vinklar.

XIV Proposition. Theorem.

Om tvänne räta lineer äro på hvar sin sida om en annan rät linea, och råka henne uti en punkt, så att de vinklar, som ligga bredvid hvarandra, äro tillsammantagne lika stora med tvänne räta; så skola dessa båda lineer vara uti en rät linea.

Låt räta lineerna BC, BD vara på hvar sin sida om AB, och råka AB uti samma punkt B; och låt vinklarne ABC och ABD vara tillhopa lika med tvänne räta; så skall det bevisas, att CB och BD äro uti en rät linea.

Bevis. Ty om icke så är, så låt BE vara uti rät linea med CB a. Emedan då CBE är *en* rät linea, så måste vinklarne ABC + ABE = tvänne räta b; men det är antaget, att äfven vinklarne ABC + ABD = tvänne räta, och derföre skulle vinklarne

ABC + ABE = ABC + ABD, c;

a. **2** postul. b. **13** prop. c. **1** axiom. d. **3** axiom.

och om man då tager bort den gemensamma vinkeln ABC, så skulle vinkeln ABE = ABD, d; en del lika stor med det hela, hvilket är omöjligt. Derföre kan ej BE vara i rät linea med CB. På samma sätt bevises, att ingen annan linea, förutan BD, kan vara uti rät linea med BC. Alltså äro CB och BD uti en rät linea; h. s. b.

Corollarium. *Af detta bevis följer, att genom tvänne punkter, C och B, kan blott en rät linea dragas.*

XV Proposition. Theorem.

Om tvänne räta lineer skära hvarandra; så äro de vinklar, som stå midtemot hvarandra, lika stora.

(Dessa vinklar kallas *vertical-vinklar.*)

Låt AB och CD vara tvänne räta lineer, som skära hvarandra uti punkten E; så skall det bevisas, att verticalvinklarne AEC och BED äro lika stora, och att verticalvinklarne CEB och AED äro lika stora.

Bevis. Vinklarne AEC + CEB = tvänne räta; **13** prop. äfvensom vinklarne BED + CEB = tvänne räta; **13** prop. Således måste AEC + CEB = BED + CEB; **1** axiom, samt, då CEB tages bort på båda ställen, AEC = BED, h. s. b. . . **3** axiom. På samma sätt bevises, att CEB = AED.

Corollarium. *Häraf är klart, att då tvänne räta lineer skära hvarandra, äro alla fyra vinklarne AEC, CEB, BED och DEA tillhopa lika stora med fyra räta.*

XVI Proposition. Theorem.

Om en sida uti en triangel utdrages, så är den yttre vinkeln större, än hvar och en af dem, som stå emot honom inuti triangeln.

ABC.

Bevis
Emedan, uti trianglarna AEB, CEF, AE = EC, och BE = EF, samt mellanliggande vinklarne AEB och CEF äfven äro lika stora, c; så måste vinkeln FCE, som står emot sidan EF, vara lika stor med BAE, som står emot den lika stora sidan BE, d. Men vinkeln ACD > FCE; derföre är äfven ACD >BAE, h. s. b.

a. **10** prop. b. **3** prop. c. **15** prop. d. **4**
Om BC skäres midtitu, bevises på samma sätt, att ACD, eller den med honom lika stora vinkeln BCG, > ABC.

och om man då tager bort den gemensamma vinkeln ABC, så skulle vinkeln ABE = ABD, d; en del lika stor med det hela, hvilket är omöjligt. Derföre kan ej BE vara i rät linea med CB. På samma sätt bevises, att ingen annan linea, förutan BD, kan vara uti rät linea med BC. Alltså äro CB och BD uti en rät linea; h. s. b.

Corollarium. *Af detta bevis följer, att genom tvänne punkter, C och B, kan blott en rät linea dragas.*

XV Proposition. Theorem.

Om tvänne räta lineer skära hvarandra; så äro de vinklar, som stå midtemot hvarandra, lika stora.

(Dessa vinklar kallas *vertical-vinklar.*)

Låt AB och CD vara tvänne räta lineer, som skära hvarandra uti punkten E; så skall det bevisas, att verticalvinklarne AEC och BED äro lika stora, och att verticalvinklarne CEB och AED äro lika stora.

Bevis. Vinklarne AEC + CEB = tvänne räta; **13** prop. äfvensom vinklarne BED + CEB = tvänne räta; **13** prop.

Således måste AEC + CEB = BED + CEB; **1** axiom, samt, då CEB tages bort på båda ställen, AEC = BED, h. s. b. . . **3** axiom. På samma sätt bevises, att CEB = AED.

Corollarium. *Häraf är klart, att då tvänne räta lineer skära hvarandra, äro alla fyra vinklarne AEC, CEB, BED och DEA tillhopa lika stora med fyra räta.*

XVI Proposition. Theorem.

Om en sida uti en triangel utdrages, så är den yttre vinkeln större, än hvar och en af dem, som stå emot honom inuti triangeln.

ABC.

Bevis
Emedan, uti trianglarna AEB, CEF, AE = EC, och BE = EF, samt mellanliggande vinklarne AEB och CEF äfven äro lika stora, c; så måste vinkeln FCE, som står emot sidan EF, vara lika stor med BAE, som står emot den lika stora sidan BE, d. Men vinkeln ACD > FCE; derföre är äfven ACD >BAE, h. s. b.

a. **10** prop. b. **3** prop. c. **15** prop. d. **4**
Om BC skäres midtitu, bevises på samma sätt, att ACD, eller den med honom lika stora vinkeln BCG, > ABC.

och om man då tager bort den gemensamma vinkeln ABC, så skulle vinkeln ABE = ABD, d; en del lika stor med det hela, hvilket är omöjligt. Derföre kan ej BE vara i rät linea med CB. På samma sätt bevises, att ingen annan linea, förutan BD, kan vara uti rät linea med BC. Alltså äro CB och BD uti en rät linea; h. s. b.

Corollarium. *Af detta bevis följer, att genom tvänne punkter, C och B, kan blott en rät linea dragas.*

XV Proposition. Theorem.

Om tvänne räta lineer skära hvarandra; så äro de vinklar, som stå midtemot hvarandra, lika stora.

(Dessa vinklar kallas *vertical-vinklar.*)

Låt AB och CD vara tvänne räta lineer, som skära hvarandra uti punkten E; så skall det bevisas, att verticalvinklarne AEC och BED äro lika stora, och att verticalvinklarne CEB och AED äro lika stora.

Bevis. Vinklarne AEC + CEB = tvänne räta; **13** prop. äfvensom vinklarne BED + CEB = tvänne räta; **13** prop.
Således måste AEC + CEB = BED + CEB; **1** axiom, samt, då CEB tages bort på båda ställen, AEC = BED, h. s. b. . . **3** axiom. På samma sätt bevises, att CEB = AED.

Corollarium. *Häraf är klart, att då tvänne räta lineer skära hvarandra, äro alla fyra vinklarne AEC, CEB, BED och DEA tillhopa lika stora med fyra räta.*

XVI Proposition. Theorem.

Om en sida uti en triangel utdrages, så är den yttre vinkeln större, än hvar och en af dem, som stå emot honom inuti triangeln.

ABC.

Bevis
Emedan, uti trianglarna AEB, CEF, AE = EC, och BE = EF, samt mellanliggande vinklarne AEB och CEF äfven äro lika stora, c; så måste vinkeln FCE, som står emot sidan EF, vara lika stor med BAE, som står emot den lika stora sidan BE, d. Men vinkeln ACD > FCE; derföre är äfven ACD >BAE, h. s. b.

a. **10** prop. b. **3** prop. c. **15** prop. d. **4**
Om BC skäres midtitu, bevises på samma sätt, att ACD, eller den med honom lika stora vinkeln BCG, > ABC.

XVII Proposition. Theorem.

Uti hvar och en triangel äro tvänne vinklar tillhopatagne mindre än tvänne räta, ehuru de tagas.

Uti triangeln ABC äro vinklarna B och ACB tillhopa mindre än tvänne räta.

Bevis B ... **16** B + ACB; **4** B + ACB = tvänne räta; **13** prop. alltså äro B + ACB < tvänne räta h. s. b.

På lika sätt bevises, att A + BCA < tvänne räta; och att A + B < tvänne räta, om sidan AB utdrages.

XVII Proposition. Theorem.

Uthi hvar och en triangel är den vinkel större, som står emot en större sida.

ACB.

Bevis. Gör AD = AB, sammanbind B och D.

Uti den likbenta triangeln ABD äro vinklarne vid basen ABD = ADB; **5** C; **16** C, och således hela vinkeln ABC ännu större än ACB, h. s. b.

XIX. Proposition. Theorem.

Uti hvar och en triangel är den sidan större, som står emot en större vinkel,

Låt vinkeln A > C; så skall det bevisas, att BC > AB.

Bevis. Ty BC kan ej vara mindre än AB; emedan då skulle vinkeln A < C, a, tvärtemot hypothesen. Icke heller kan BC = AB; emedan då skulle vinkeln A = C, b; hvilket äfven strider emot hypothesen. Då således BC hvarken kan vara mindre än, eller lika stor med AB; så måste BC > AB, h. s. b.

a. **18** prop. b. **5** prop.

XX Proposition. Theorem.

Uti hvar och en triangel äro tvänne sidor tillsammantagna större än den tredje, ehuru de tagas.

BC.

Bevis
Emedan således ADC är en likbent triangel, så måste vinklarne vid basen ACD = D a; och i följe deraf BCD > D. Emedan nu BCD är en triangel, som har vinkeln BCD > D; så måste sidan BD > BC, b; men BD

a. **5** prop. b. **19** prop.

XVII Proposition. Theorem.

Uti hvar och en triangel äro tvänne vinklar tillhopatagne mindre än tvänne räta, ehuru de tagas.

Uti triangeln ABC äro vinklarna B och ACB tillhopa mindre än tvänne räta.

Bevis B ... **16** B + ACB; **4** B + ACB = tvänne räta; **13** prop. alltså äro B + ACB < tvänne räta h. s. b.

På lika sätt bevises, att A + BCA < tvänne räta; och att A + B < tvänne räta, om sidan AB utdrages.

XVII Proposition. Theorem.

Uthi hvar och en triangel är den vinkel större, som står emot en större sida.

ACB.

Bevis. Gör AD = AB, sammanbind B och D.

Uti den likbenta triangeln ABD äro vinklarne vid basen ABD = ADB; **5** C; **16** C, och således hela vinkeln ABC ännu större än ACB, h. s. b.

XIX. Proposition. Theorem.

Uti hvar och en triangel är den sidan större, som står emot en större vinkel,

Låt vinkeln A > C; så skall det bevisas, att BC > AB.

Bevis. Ty BC kan ej vara mindre än AB; emedan då skulle vinkeln A < C, a, tvärtemot hypothesen. Icke heller kan BC = AB; emedan då skulle vinkeln A = C, b; hvilket äfven strider emot hypothesen. Då således BC hvarken kan vara mindre än, eller lika stor med AB; så måste BC > AB, h. s. b.

a. **18** prop. b. **5** prop.

XX Proposition. Theorem.

Uti hvar och en triangel äro tvänne sidor tillsammantagna större än den tredje, ehuru de tagas.

BC.

Bevis
Emedan således ADC är en likbent triangel, så måste vinklarne vid basen ACD = D a; och i följe deraf BCD > D. Emedan nu BCD är en triangel, som har vinkeln BCD > D; så måste sidan BD > BC, b; men BD

a. **5** prop. b. **19** prop.

XVII Proposition. Theorem.

Uti hvar och en triangel äro tvänne vinklar tillhopatagne mindre än tvänne räta, ehuru de tagas.

Uti triangeln ABC äro vinklarna B och ACB tillhopa mindre än tvänne räta.

Bevis B ... **16** B + ACB; **4** B + ACB = tvänne räta; **13** prop. alltså äro B + ACB < tvänne räta h. s. b.

På lika sätt bevises, att A + BCA < tvänne räta; och att A + B < tvänne räta, om sidan AB utdrages.

XVII Proposition. Theorem.

Uthi hvar och en triangel är den vinkel större, som står emot en större sida.

ACB.

Bevis. Gör AD = AB, sammanbind B och D.

Uti den likbenta triangeln ABD äro vinklarne vid basen ABD = ADB; **5** C; **16** C, och således hela vinkeln ABC ännu större än ACB, h. s. b.

XIX. Proposition. Theorem.

Uti hvar och en triangel är den sidan större, som står emot en större vinkel,

Låt vinkeln A > C; så skall det bevisas, att BC > AB.

Bevis. Ty BC kan ej vara mindre än AB; emedan då skulle vinkeln A < C, a, tvärtemot hypothesen. Icke heller kan BC = AB; emedan då skulle vinkeln A = C, b; hvilket äfven strider emot hypothesen. Då således BC hvarken kan vara mindre än, eller lika stor med AB; så måste BC > AB, h. s. b.

a. **18** prop. b. **5** prop.

XX Proposition. Theorem.

Uti hvar och en triangel äro tvänne sidor tillsammantagna större än den tredje, ehuru de tagas.

BC.

Bevis
Emedan således ADC är en likbent triangel, så måste vinklarne vid basen ACD = D a; och i följe deraf BCD > D. Emedan nu BCD är en triangel, som har vinkeln BCD > D; så måste sidan BD > BC, b; men BD

a. **5** prop. b. **19** prop.

XVII Proposition. Theorem.

Uti hvar och en triangel äro tvänne vinklar tillhopatagne mindre än tvänne räta, ehuru de tagas.

Uti triangeln ABC äro vinklarna B och ACB tillhopa mindre än tvänne räta.

Bevis B ... **16** B + ACB; **4** B + ACB = tvänne räta; **13** prop. alltså äro B + ACB < tvänne räta h. s. b.

På lika sätt bevises, att A + BCA < tvänne räta; och att A + B < tvänne räta, om sidan AB utdrages.

XVII Proposition. Theorem.

Uthi hvar och en triangel är den vinkel större, som står emot en större sida.

ACB.

Bevis. Gör AD = AB, sammanbind B och D.

Uti den likbenta triangeln ABD äro vinklarne vid basen ABD = ADB; **5** C; **16** C, och således hela vinkeln ABC ännu större än ACB, h. s. b.

XIX. Proposition. Theorem.

Uti hvar och en triangel är den sidan större, som står emot en större vinkel,

Låt vinkeln A > C; så skall det bevisas, att BC > AB.

Bevis. Ty BC kan ej vara mindre än AB; emedan då skulle vinkeln A < C, a, tvärtemot hypothesen. Icke heller kan BC = AB; emedan då skulle vinkeln A = C, b; hvilket äfven strider emot hypothesen. Då således BC hvarken kan vara mindre än, eller lika stor med AB; så måste BC > AB, h. s. b.

a. **18** prop. b. **5** prop.

XX Proposition. Theorem.

Uti hvar och en triangel äro tvänne sidor tillsammantagna större än den tredje, ehuru de tagas.

BC.

Bevis
Emedan således ADC är en likbent triangel, så måste vinklarne vid basen ACD = D a; och i följe deraf BCD > D. Emedan nu BCD är en triangel, som har vinkeln BCD > D; så måste sidan BD > BC, b; men BD

a. **5** prop. b. **19** prop.

är detsamma som AB + AC; emedan AD är gjord lika stor med AC; alltså är AB + AC > BC, h. s. b.

XXI Proposition. Theorem.

Om man från yttersta ändarna af en sida uti en triangel drager tvänne räta lineer till en punkt inuti honom; så skola dessa båda lineer, tillhopatagna, vara mindre, än triangelns öfriga båda sidor tillhopa; men vinkeln, som omfattas af de båda lineerna, skall vara större, än vinkeln, som omfattas af sidorna.

Låt ABC vara en triangel, och räta lineerna BD och CD vara dragna från yttersta ändarna af sidan BC till punkten D inuti triangeln; så skall det bevisas, att BD + CD < AB + AC; men att vinkeln BDC > BAC.

Drag ut BD till E.

Bevis EB .... **20** EB + EC **4** DC .... **20** DB + DC **4** axiom.

Alltså måste AB + AC vara ännu större DB + DC, eller BD + CD < AB + AC, h. s. b.

2:o Uti triangeln EDC är sidan ED utdragen, hvadan vinkeln ....BDC>BEC **16**BAC **16** prop.

Alltså måste vinkeln BDC vara ännu större än BAC, h. s. b.

XXII Proposition. Problem.

Att upprita en triangel af tre räta lineer, som äro lika stora med hvar sin af trenne gifna räta lineer; af hvilka två tillhopatagna äro större än den tredje, ehuru de tagas.

Låt A, B, C vara de trenne gifna räta lineerna, det begäres, att en triangel måtte uppritas, hvars sidor äro lika stora med hvar sin af de räta lineerna A, B, C.

a. **3** prop. b. **14** defin. c. **1** axiom.

Drag en rät linea DH, gör DF = A, FG = B, och GH = C, a; tag sedan F till medelpunkt och rita en cirkel, hvars peripheri går genom D; och åter G till medelpunkt för en cirkel, hvars peripheri går genom H; sammanbind slutligen punkten K, der båda peripherierna skära hvarandra med F och G; så är KGF den begärdte triangeln.

Bevis. DF = FK, b; men DF = A; derföre måste äfven FK = A, c. FG är gjord =B. GH=GK, b; men GH = C; derföre måste äfven GK = C, c. Alltså är hvar och en af sidorna

är detsamma som AB + AC; emedan AD är gjord lika stor med AC; alltså är AB + AC > BC, h. s. b.

XXI Proposition. Theorem.

Om man från yttersta ändarna af en sida uti en triangel drager tvänne räta lineer till en punkt inuti honom; så skola dessa båda lineer, tillhopatagna, vara mindre, än triangelns öfriga båda sidor tillhopa; men vinkeln, som omfattas af de båda lineerna, skall vara större, än vinkeln, som omfattas af sidorna.

Låt ABC vara en triangel, och räta lineerna BD och CD vara dragna från yttersta ändarna af sidan BC till punkten D inuti triangeln; så skall det bevisas, att BD + CD < AB + AC; men att vinkeln BDC > BAC.

Drag ut BD till E.

Bevis EB .... **20** EB + EC **4** DC .... **20** DB + DC **4** axiom.

Alltså måste AB + AC vara ännu större DB + DC, eller BD + CD < AB + AC, h. s. b.

2:o Uti triangeln EDC är sidan ED utdragen, hvadan vinkeln ....BDC>BEC **16**BAC **16** prop.
Alltså måste vinkeln BDC vara ännu större än BAC, h. s. b.

XXII Proposition. Problem.

Att upprita en triangel af tre räta lineer, som äro lika stora med hvar sin af trenne gifna räta lineer; af hvilka två tillhopatagna äro större än den tredje, ehuru de tagas.

Låt A, B, C vara de trenne gifna räta lineerna, det begäres, att en triangel måtte uppritas, hvars sidor äro lika stora med hvar sin af de räta lineerna A, B, C.

a. **3** prop. b. **14** defin. c. **1** axiom.

Drag en rät linea DH, gör DF = A, FG = B, och GH = C, a; tag sedan F till medelpunkt och rita en cirkel, hvars peripheri går genom D; och åter G till medelpunkt för en cirkel, hvars peripheri går genom H; sammanbind slutligen punkten K, der båda peripherierna skära hvarandra med F och G; så är KGF den begärdte triangeln.

Bevis. DF = FK, b; men DF = A; derföre måste äfven FK = A, c. FG är gjord =B. GH=GK, b; men GH = C; derföre måste äfven GK = C, c. Alltså är hvar och en af sidorna

är detsamma som AB + AC; emedan AD är gjord lika stor med AC; alltså är AB + AC > BC, h. s. b.

XXI Proposition. Theorem.

Om man från yttersta ändarna af en sida uti en triangel drager tvänne räta lineer till en punkt inuti honom; så skola dessa båda lineer, tillhopatagna, vara mindre, än triangelns öfriga båda sidor tillhopa; men vinkeln, som

omfattas af de båda lineerna, skall vara större, än vinkeln, som omfattas af sidorna.

Låt ABC vara en triangel, och räta lineerna BD och CD vara dragna från yttersta ändarna af sidan BC till punkten D inuti triangeln; så skall det bevisas, att BD + CD < AB + AC; men att vinkeln BDC > BAC.

Drag ut BD till E.

Bevis EB .... **20** EB + EC **4** DC .... **20** DB + DC **4** axiom.

Alltså måste AB + AC vara ännu större DB + DC, eller BD + CD < AB + AC, h. s. b.

2:o Uti triangeln EDC är sidan ED utdragen, hvadan vinkeln ....BDC>BEC **16**BAC **16** prop. Alltså måste vinkeln BDC vara ännu större än BAC, h. s. b.

XXII Proposition. Problem.

Att upprita en triangel af tre räta lineer, som äro lika stora med hvar sin af trenne gifna räta lineer; af hvilka två tillhopatagna äro större än den tredje, ehuru de tagas.

Låt A, B, C vara de trenne gifna räta lineerna, det begäres, att en triangel måtte uppritas, hvars sidor äro lika stora med hvar sin af de räta lineerna A, B, C.

a. **3** prop. b. **14** defin. c. **1** axiom.

Drag en rät linea DH, gör DF = A, FG = B, och GH = C, a; tag sedan F till medelpunkt och rita en cirkel, hvars peripheri går genom D; och åter G till medelpunkt för en cirkel, hvars peripheri går genom H; sammanbind slutligen punkten K, der båda peripherierna skära hvarandra med F och G; så är KGF den begärdte triangeln.

Bevis. DF = FK, b; men DF = A; derföre måste äfven FK = A, c. FG är gjord =B. GH=GK, b; men GH = C; derföre måste äfven GK = C, c. Alltså är hvar och en af sidorna

FK, FG, GK, lika stor med hvar sin af lineerna A, B, C, h. s. b.

XXIII Proposition. Problem.

Att vid en gifven rät linea, och uti en gifven punkt på henne, rita en vinkel, som är lika stor med en gifven rätlinig vinkel.

Låt AB vara den gifna räta lineen och A den gifna punkten, samt D den gifna vinkeln; det begäres, att en vinkel måtte ritas uti A, vid lineen AB, som är lika stor med D.

Tag punkterna C och E efter behag, drag CE, och upprita en triangel ABF, hvars sidor äro lika stora med hvar sin af lineerna CD, DE, CE; så att AB=DC, AF=DE och BF=CE; **22** prop. då måste vinkeln CDE=BAF, h. s. b. . **8** prop.

XXIV Proposition. Theorem.

Om två sidor uti en triangel äro lika stora med hvar sin sida uti en annan triangel, men mellanliggande vinkeln uti den ena triangeln är större, än mellanliggande vinkeln uti den andra; så skall basen, som står emot den större vinkeln, vara större, än basen, som står emot den mindre vinkeln.

EF.

Rita uti D, vid räta lineen DF, en vinkel GDF = A, a; gör DG = AB eller = DE, b; drag GE.

Bevis. Emedan således DG = AB, DF = AC och mellanliggande vinkeln GDF = A; så måste basen GF=BC, c.

a. **23** prop. b. **3** prop. c. **4** prop. d. **5** prop. e. **19** EF, h. s. b.

Skulle punkten G falla på samma räta linea, som F och E; så är

FK, FG, GK, lika stor med hvar sin af lineerna A, B, C, h. s. b.

XXIII Proposition. Problem.

Att vid en gifven rät linea, och uti en gifven punkt på henne, rita en vinkel, som är lika stor med en gifven rätlinig vinkel.

Låt AB vara den gifna räta lineen och A den gifna punkten, samt D den gifna vinkeln; det begäres, att en vinkel måtte ritas uti A, vid lineen AB, som är lika stor med D.

Tag punkterna C och E efter behag, drag CE, och upprita en triangel ABF, hvars sidor äro lika stora med hvar sin af lineerna CD, DE, CE; så att AB=DC, AF=DE och BF=CE; **22** prop. då måste vinkeln CDE=BAF, h. s. b. . **8** prop.

XXIV Proposition. Theorem.

Om två sidor uti en triangel äro lika stora med hvar sin sida uti en annan triangel, men mellanliggande vinkeln uti den ena triangeln är större, än mellanliggande vinkeln uti den andra; så skall basen, som står emot den större vinkeln, vara större, än basen, som står emot den mindre vinkeln.

EF.

Rita uti D, vid räta lineen DF, en vinkel GDF = A, a; gör DG = AB eller = DE, b; drag GE.

Bevis. Emedan således DG = AB, DF = AC och mellanliggande vinkeln GDF = A; så måste basen GF=BC, c.

a. **23** prop. b. **3** prop. c. **4** prop. d. **5** prop. e. **19** EF, h. s. b.

Skulle punkten G falla på samma räta linea, som F och E; så är

FK, FG, GK, lika stor med hvar sin af lineerna A, B, C, h. s. b.

XXIII Proposition. Problem.

Att vid en gifven rät linea, och uti en gifven punkt på henne, rita en vinkel, som är lika stor med en gifven rätlinig vinkel.

Låt AB vara den gifna räta lineen och A den gifna punkten, samt D den gifna vinkeln; det begäres, att en vinkel måtte ritas uti A, vid lineen AB, som är lika stor med D.

Tag punkterna C och E efter behag, drag CE, och upprita en triangel ABF, hvars sidor äro lika stora med hvar sin af lineerna CD, DE, CE; så att AB=DC, AF=DE och BF=CE; **22** prop. då måste vinkeln CDE=BAF, h. s. b. . **8** prop.

XXIV Proposition. Theorem.

Om två sidor uti en triangel äro lika stora med hvar sin sida uti en annan triangel, men mellanliggande vinkeln uti den ena triangeln är större, än mellanliggande vinkeln uti den andra; så skall basen, som står emot den större vinkeln, vara större, än basen, som står emot den mindre vinkeln.

EF.

Rita uti D, vid räta lineen DF, en vinkel GDF = A, a; gör DG = AB eller = DE, b; drag GE.

Bevis. Emedan således DG = AB, DF = AC och mellanliggande vinkeln GDF = A; så måste basen GF=BC, c.

a. **23** prop. b. **3** prop. c. **4** prop. d. **5** prop. e. **19** EF, h. s. b.

Skulle punkten G falla på samma räta linea, som F och E; så är

af sig sjelf klart, att FG > FE, och således äfven BC > EF.

Skulle åter punkten G falla så, att E kommer inuti triangeln DFG; så bevises på samma sätt, som förut, att GF = BC

Vidare efter tvänne räta lineer FE och DE äro dragna från yttersta ändarna D och F af sidan DF till punkten E inuti triangeln DFG; så måste DE+EF < DG+GF, a; och då DE=DG, måste således EF< GF, b, eller GF > EF och

således äfven BC > EF, h. s. b.

a. **21** prop. b. **5** axiom

XXV Proposition. Theorem.

Om tvänne sidor uti en triangel äro lika stora med hvar sin sida uti en annan triangel; men basen uti den ena triangeln är större, än basen uti den andra; så skall den vinkeln, som står emot den större basen, vara större, än den vinkeln, som står emot den mindre basen.

A.

Bevis:A, h. s. b.

a. **24** prop. b. **4** prop.

XXVI Proposition. Theorem a).

Om två vinklar uti en triangel äro lika stora med hvar sin vinkel uti en annan triangel, och mellanliggande sidan uti den ena triangeln är lika stor med mellanliggande sidan uti den andra; så skola de öfriga sidorna uti den ena triangeln vara lika stora med hvar sin af de öfriga sidorna uti den andra, som stå emot lika stora vinklar, samt den öfriga vinkeln uti den ena triangeln vara lika stor med den öfriga vinkeln uti den andra.

Låt uti trianglarna ABC, DEF, vinkeln B=DEF, C=DFE, samt sidan BC=EF; så skall det bevisas, att DF, som står emot vinkeln DEF, är lika stor med AC, som står emot den lika stora vinkeln ABC; att DE=AB, och att vinkeln D=A.

af sig sjelf klart, att FG > FE, och således äfven BC > EF.

Skulle åter punkten G falla så, att E kommer inuti triangeln DFG; så bevises på samma sätt, som förut, att GF = BC

Vidare efter tvänne räta lineer FE och DE äro dragna från yttersta ändarna D och F af sidan DF till punkten E inuti triangeln DFG; så måste DE+EF < DG+GF, a; och då DE=DG, måste således EF< GF, b, eller GF > EF och således äfven BC > EF, h. s. b.

a. **21** prop. b. **5** axiom

XXV Proposition. Theorem.

Om tvänne sidor uti en triangel äro lika stora med hvar sin sida uti en annan triangel; men basen uti den ena triangeln är större, än basen uti den andra; så skall den vinkeln, som står emot den större basen, vara större, än den vinkeln, som står emot den mindre basen.

A.

Bevis:A, h. s. b.

a. **24** prop. b. **4** prop.

XXVI Proposition. Theorem a).

Om två vinklar uti en triangel äro lika stora med hvar sin vinkel uti en annan triangel, och mellanliggande sidan uti den ena triangeln är lika stor med mellanliggande sidan uti den andra; så skola de öfriga sidorna uti den ena triangeln vara lika stora med hvar sin af de öfriga sidorna uti den andra, som stå emot lika stora vinklar, samt den öfriga vinkeln uti den ena triangeln vara lika stor med den öfriga vinkeln uti den andra.

Låt uti trianglarna ABC, DEF, vinkeln B=DEF, C=DFE, samt sidan BC=EF; så skall det bevisas, att DF, som står emot vinkeln DEF, är lika stor med AC, som står emot den lika stora vinkeln ABC; att DE=AB, och att vinkeln D=A.

af sig sjelf klart, att FG > FE, och således äfven BC > EF.

Skulle åter punkten G falla så, att E kommer inuti triangeln DFG; så bevises på samma sätt, som förut, att GF = BC

Vidare efter tvänne räta lineer FE och DE äro dragna från yttersta ändarna D och F af sidan DF till punkten E inuti triangeln DFG; så måste DE+EF < DG+GF, a; och då DE=DG, måste således EF< GF, b, eller GF > EF och således äfven BC > EF, h. s. b.

a. **21** prop. b. **5** axiom

XXV Proposition. Theorem.

Om tvänne sidor uti en triangel äro lika stora med hvar sin sida uti en annan triangel; men basen uti den ena triangeln är större, än basen uti den andra; så skall den vinkeln, som står emot den större basen, vara större, än den vinkeln, som står emot den mindre basen.

A.

Bevis:A, h. s. b.

a. **24** prop. b. **4** prop.

XXVI Proposition. Theorem a).

Om två vinklar uti en triangel äro lika stora med hvar sin vinkel uti en annan triangel, och mellanliggande sidan uti den ena triangeln är lika stor med mellanliggande sidan uti den andra; så skola de öfriga sidorna uti den ena triangeln vara lika stora med hvar sin af de öfriga sidorna uti den andra, som stå emot lika stora vinklar, samt den öfriga vinkeln uti den ena triangeln vara lika stor med den öfriga vinkeln uti den andra.

Låt uti trianglarna ABC, DEF, vinkeln B=DEF, C=DFE, samt sidan BC=EF; så skall det bevisas, att DF, som står emot vinkeln DEF, är lika stor med AC, som står emot den lika stora vinkeln ABC; att DE=AB, och att vinkeln D=A.

Bevis.AC. På samma sätt bevises äfven, att icke DF<AC; hvaraf följer, att DF=AC.

Emedan således BC=EF, enligt hypothesen, och det nu är bevist, att AC=DF, samt vinkeln C=F, enligt hypothesen; så måste, b, basen AB=DE och vinkeln A=D, h. s. b.

a. **8** prop. b. **4** prop. c. **1** axiom.

XXVI Proposition. Theorem b).

Om tvänne vinklar uti en triangel äro lika stora med hvar sin vinkel uti en annan triangel, och en sida, som står emot någon af dessa vinklar uti den ena triangeln, är lika stor med den sidan, som står emot den lika stora vinkeln uti den andra triangeln; så skola de öfriga sidorna uti den ena triangeln vara lika stora med hvar sin af de öfriga sidorna uti den andra triangeln, nämligen så, att de sidor blifva lika stora, som ligga emellan de bekanta vinklarne, samt den öfriga vinkeln uti den ena triangeln lika stor med den öfriga vinkeln uti den andra.

Låt uti trianglarna ABC, DEF, vinkeln B=E, C=F, samt sidan AC, som står emot vinkeln B, vara lika stor med DF, som står emot den lika stora vinkeln E; så skall det bevisas, att mellanliggande sidan BC=EF, att AB=DE, samt att vinkeln A=D.

Bevis.
Då äro uti trianglarna ABC, DGF, sidan AC=DF, sidan BC=GF, och mellanliggande vinkeln C=F; derföre skulle vinkeln ABC==DGF, eftersom, dessa båda vinklar stå emot de lika stora sidorna AC och DF, b. Men nu är det antaget, att vinkeln ABC=DEF; alltså skulle vinkeln DEF=DGF, c; d.v.s. att den yttre vinkeln skulle vara lika stor med den, som står emot honom inuti triangeln DEG, hvilket är omöjligt, d. Alltså kan icke EF>BC; och på samma sätt bevises, att icke EF<BG; hvadan nödvändigt EF=BC.

Efter då tvänne sidor AC och BC, samt mellanliggande vinkeln C, uti den ena triangeln, äro lika stora med hvar

sin sida DF och EF, samt mellanliggande vinkeln F, uti den andra triangeln, så måste AB = DE, samt vinkeln A=D, b, h. s. b.

a. **3** prop. b. **4** prop. c. **1** axiom. d **16** prop. Bevis.AC. På samma sätt bevises äfven, att icke DF<AC; hvaraf följer, att DF=AC.

Emedan således BC=EF, enligt hypothesen, och det nu är bevist, att AC=DF, samt vinkeln C=F, enligt hypothesen; så måste, b, basen AB=DE och vinkeln A=D, h. s. b.

a. **8** prop. b. **4** prop. c. **1** axiom.

XXVI Proposition. Theorem b).

Om tvänne vinklar uti en triangel äro lika stora med hvar sin vinkel uti en annan triangel, och en sida, som står emot någon af dessa vinklar uti den ena triangeln, är lika stor med den sidan, som står emot den lika stora vinkeln uti den andra triangeln; så skola de öfriga sidorna uti den ena triangeln vara lika stora med hvar sin af de öfriga sidorna uti den andra triangeln, nämligen så, att de sidor blifva lika stora, som ligga emellan de bekanta vinklarne, samt den öfriga vinkeln uti den ena triangeln lika stor med den öfriga vinkeln uti den andra.

Låt uti trianglarna ABC, DEF, vinkeln B=E, C=F, samt sidan AC, som står emot vinkeln B, vara lika stor med DF, som står emot den lika stora vinkeln E; så skall det bevisas, att mellanliggande sidan BC=EF, att AB=DE, samt att vinkeln A=D.

Bevis.
Då äro uti trianglarna ABC, DGF, sidan AC=DF, sidan BC=GF, och mellanliggande vinkeln C=F; derföre skulle vinkeln ABC==DGF, eftersom, dessa båda vinklar stå emot de lika stora sidorna AC och DF, b. Men nu är det antaget, att vinkeln ABC=DEF; alltså skulle vinkeln DEF=DGF, c; d.v.s. att den yttre vinkeln skulle vara lika stor med den, som står emot honom inuti triangeln DEG, hvilket är omöjligt, d. Alltså kan icke EF>BC; och på samma sätt bevises, att icke EF<BG; hvadan nödvändigt EF=BC.

Efter då tvänne sidor AC och BC, samt mellanliggande vinkeln C, uti den ena triangeln, äro lika stora med hvar sin sida DF och EF, samt mellanliggande vinkeln F, uti den andra triangeln, så måste AB = DE, samt vinkeln A=D, b, h. s. b.

a. **3** prop. b. **4** prop. c. **1** axiom. d **16** prop.Då en rät linea EF råkar tvänne andra räta lineer AB och CD; kallas de tvänne vinklar, som stå emot hvarandra, innantill på hvar sin sida om henne, *alternat-vinklar.* Således äro AEF och EFD alternat-vinklar sinsimellan, samt vinklarne BEF och EFC alternat-vinklar sinsimellan.

XXVII Proposition. Theorem.

Om en rät linea, som råkar tvänne andra räta lineer, gör alternatvinklarna lika stora; så skola dessa tvänne lineer vara parallela.

Låt alternatvinkeln AEF=EFD; så skall det bevisas, att AB är parallel med CD.

a. **16** prop. b. **21** defin.

Bevis.EFD, som står emot honom inuti triangeln, a; men det är antaget att AEF=EFD; således kunna icke AB och CD råkas, om de utdragas åt B och D. På samma sätt bevises, att de ej kunna råkas, om de utdragas åt A och C. Alltså äro AB och CD parallela, b, h. s. b.

XXVIII. Proposition Theorem.

Om en rät linea EF, som råkar tvänne andra räta lineer AB och CD, 1:o *gör den yttre vinkeln EGB=EHD, som står emot honom innantill; så skola AB och CD vara parallela.*

2:o *gör de båda vinklarna BGH och GHD, som stå innantill på samma sida om den skärande lineen, tillhopatagna lika stora med tvänne räta; så skola AB och CD vara parallela.*

a. **15** prop. b. **1** axiom. c. **27** prop. d. **13** prop.

Bevis. 1:o Emedan det är antaget, att vinkeln EGB=GHD, och EGB=AGH, a; så måste AGH=GHD, b. Efter således alternatvinklarne äro lika stora, så äro AB och CD parallela, c, h. s. b.

a. **15** prop. b. **1** axiom. c. **27** prop. d. **13** prop.

2:o Emedan det är antaget, att BGH och GHD äro tillhopa lika med tvänne räta, och BGH och AGH tillhopa äfvenledes äro lika med tvänne räta, d; så måste BGH och GHD tillhopa vara lika stora med BGH och AGH tillhopa, b; och, om man då från båda ställen borttager den gemensamma vinkeln BGH, blifver AGH=GHD, hvadan AB och CD måste vara parallela, c. h. s. b.

Då en rät linea EF råkar tvänne andra räta lineer AB och CD; kallas de tvänne vinklar, som stå emot hvarandra, innantill på hvar sin sida om henne, *alternat-vinklar.* Således äro AEF och EFD alternat-vinklar sinsimellan, samt vinklarne BEF och EFC alternat-vinklar sinsimellan.

XXVII Proposition. Theorem.

Om en rät linea, som råkar tvänne andra räta lineer, gör alternatvinklarna lika stora; så skola dessa tvänne lineer vara parallela.

Låt alternatvinkeln AEF=EFD; så skall det bevisas, att AB är parallel med CD.

a. **16** prop. b. **21** defin.

Bevis.EFD, som står emot honom inuti triangeln, a; men det är antaget att AEF=EFD; således kunna icke AB och CD råkas, om de utdragas åt B och D. På samma sätt bevises, att de ej kunna råkas, om de utdragas åt A och C. Alltså äro AB och CD parallela, b, h. s. b.

XXVIII. Proposition Theorem.

Om en rät linea EF, som råkar tvänne andra räta lineer AB och CD, 1:o *gör den yttre vinkeln EGB=EHD, som står emot honom innantill; så skola AB och CD vara parallela.*

2:o *gör de båda vinklarna BGH och GHD, som stå innantill på samma sida om den skärande lineen, tillhopatagna lika stora med tvänne räta; så skola AB och CD vara parallela.*

a. **15** prop. b. **1** axiom. c. **27** prop. d. **13** prop.

Bevis. 1:o Emedan det är antaget, att vinkeln EGB=GHD, och EGB=AGH, a; så måste AGH=GHD, b. Efter således alternatvinklarne äro lika stora, så äro AB och CD parallela, c, h. s. b.

a. **15** prop. b. **1** axiom. c. **27** prop. d. **13** prop.

2:o Emedan det är antaget, att BGH och GHD äro tillhopa lika med tvänne räta, och BGH och AGH tillhopa äfvenledes äro lika med tvänne räta, d; så måste BGH och GHD tillhopa vara lika stora med BGH och AGH tillhopa, b; och, om man då från båda ställen borttager den gemensamma vinkeln BGH, blifver AGH=GHD, hvadan AB och CD måste vara parallela, c. h. s. b.

Då en rät linea EF råkar tvänne andra räta lineer AB och CD; kallas de tvänne vinklar, som stå emot hvarandra, innantill på hvar sin sida om henne, *alternat-vinklar.* Således äro AEF och EFD alternat-vinklar sinsimellan, samt vinklarne BEF och EFC alternat-vinklar sinsimellan.

XXVII Proposition. Theorem.

Om en rät linea, som råkar tvänne andra räta lineer, gör alternatvinklarna lika stora; så skola dessa tvänne lineer vara parallela.

Låt alternatvinkeln AEF=EFD; så skall det bevisas, att AB är parallel med CD.

a. **16** prop. b. **21** defin.

Bevis.EFD, som står emot honom inuti triangeln, a; men det är antaget att AEF=EFD; således kunna icke AB och CD råkas, om de utdragas åt B och D. På samma sätt bevises, att de ej kunna råkas, om de utdragas åt A och C. Alltså äro AB och CD parallela, b, h. s. b.

XXVIII. Proposition Theorem.

Om en rät linea EF, som råkar tvänne andra räta lineer AB och CD, 1:o *gör den yttre vinkeln EGB=EHD, som står emot honom innantill; så skola AB och CD vara parallela.*

2:o *gör de båda vinklarna BGH och GHD, som stå innantill på samma sida om den skärande lineen, tillhopatagna lika stora med tvänne räta; så skola AB och CD vara parallela.*

a. **15** prop. b. **1** axiom. c. **27** prop. d. **13** prop.

Bevis. 1:o Emedan det är antaget, att vinkeln EGB=GHD, och EGB=AGH, a; så måste AGH=GHD, b. Efter således alternatvinklarne äro lika stora, så äro AB och CD parallela, c, h. s. b.

a. **15** prop. b. **1** axiom. c. **27** prop. d. **13** prop.

2:o Emedan det är antaget, att BGH och GHD äro tillhopa lika med tvänne räta, och BGH och AGH tillhopa äfvenledes äro lika med tvänne räta, d; så måste BGH och GHD tillhopa vara lika stora med BGH och AGH tillhopa, b; och, om man då från båda ställen borttager den gemensamma vinkeln BGH, blifver AGH=GHD, hvadan AB och CD måste vara parallela, c. h. s. b.

XII Axiomet.

Om vinklarne DAB+ABF< tvänne räta; så skall det bevisas, att CD och EF råka hvarandra, om E de utdragas åt D och F.

a. 28 prop. b. 13 prop. c. 17 prop.

Bevis. Emedan vinklarne DAB+ABF< tvänne räta, så måste en rät linea, GH, kunna dragas så, att hon skär CD uti A, och att vinklarne GAB+ABF= tvänne räta. Då måste GH vara parallel med FE, a; om då icke CD råkar EF, när de båda utdragas; så skulle tvänne räta lineer CD och GH, som skär hvarandra, båda vara parallela med en och samma räta linea EF, hvilket är omöjligt; alltså måste CD och EF råka hvarandra, om de utdragas.

Om nu dessa båda räta lineer CD och EF kunde råka hvarandra, när de utdragas åt C och E; så skulle de tre räta lineerna CA, AB, BE formera en triangel, och BAC, ABE vara tvänne vinklar uti denna triangel. Nu äro alla fyra vinklarne

DAB+BAC+ABF+ABE= fyra räta, b; och tvänne af dem, DAB+ABF tvänne räta, d. v. s. att tvänne vinklar uti en triangel skulle tillhopa vara större än tvänne räta, hvilket är omöjligt, c. Alltså råkas CD och EF icke åt C och E, utan åt D och F; h. s. b.

XXIX Proposition: Theorem.

Om en rät linea råkar tvänne räta lineer, som äro parallela: så gör hon

1:o Alternatvinklarna lika stora.

2:o Den yttre vinkeln lika stor med den, som står emot honom innantill, på samma sida om den skärande lineen.

3:o De båda vinklarna, som stå innantill på samma sida, tillhopatagne lika stora med tvänne räta.

1:o Om AB är parallel med CD; så skall det bevisas, att vinkeln AGH=GHD.

Bevis.GHD+BGH .... **4** axiom men AGH+BGH = 2 räta vinklar .... **13** prop. derföre skulle GHD+BGH<2 räta, hvadan AB och CD måste råkas, om de utdragas, enligt 12:te axiom. Men emedan dessa lineer, enligt hypothesen, äro parallela, så kunna de ej råkas; och således kunna ej heller GHD+BGH< 2 räta vinklar, och icke GHD+BGH<AGH+BGH, ej heller GHDGHD

På samma sätt bevises, att icke AGH < GHD; alltså måste AGH = GHD; h. s. b.

2:o Om AB är parallel med CD; så skall vinkeln EGB=GHD.

XII Axiomet.

Om vinklarne DAB+ABF< tvänne räta; så skall det bevisas, att CD och EF råka hvarandra, om E de utdragas åt D och F.

a. 28 prop. b. 13 prop. c. 17 prop.

Bevis. Emedan vinklarne DAB+ABF< tvänne räta, så måste en rät linea, GH, kunna dragas så, att hon skär CD uti A, och att vinklarne GAB+ABF= tvänne räta. Då måste GH vara parallel med FE, a; om då icke CD råkar EF, när de båda utdragas; så skulle tvänne räta lineer CD och GH, som skär hvarandra, båda vara parallela med en och samma räta linea EF, hvilket är omöjligt; alltså måste CD och EF råka hvarandra, om de utdragas.

Om nu dessa båda räta lineer CD och EF kunde råka hvarandra, när de utdragas åt C och E; så skulle de tre räta lineerna CA, AB, BE formera en triangel, och BAC, ABE vara tvänne vinklar uti denna triangel. Nu äro alla fyra vinklarne

DAB+BAC+ABF+ABE= fyra räta, b; och tvänne af dem, DAB+ABF tvänne räta, d. v. s. att tvänne vinklar uti en triangel skulle tillhopa vara större än tvänne räta, hvilket är omöjligt, c. Alltså råkas CD och EF icke åt C och E, utan åt D och F; h. s. b.

XXIX Proposition: Theorem.

Om en rät linea råkar tvänne räta lineer, som äro parallela: så gör hon

1:o Alternatvinklarna lika stora.

2:o Den yttre vinkeln lika stor med den, som står emot honom innantill, på samma sida om den skärande lineen.

3:o De båda vinklarna, som stå innantill på samma sida, tillhopatagne lika stora med tvänne räta.

1:o Om AB är parallel med CD; så skall det bevisas, att vinkeln AGH=GHD.

Bevis.GHD+BGH .... **4** axiom men AGH+BGH = 2 räta vinklar .... **13** prop. derföre skulle GHD+BGH<2 räta, hvadan AB och CD måste råkas, om de utdragas, enligt 12:te axiom. Men emedan dessa lineer, enligt hypothesen, äro parallela, så kunna de ej råkas; och således kunna ej heller GHD+BGH< 2 räta vinklar, och icke GHD+BGH<AGH+BGH, ej heller GHDGHD

På samma sätt bevises, att icke AGH < GHD; alltså måste AGH = GHD; h. s. b.

2:o Om AB är parallel med CD; så skall vinkeln EGB=GHD.

Bevis. Emedan nyligen är bevist, att alternatvinkeln

AGH=GHD; och vinkeln AGH=EGB .... **15** prop.; så måste .... EGB=GHD; h. s. b. ... **1** axiom.

3:o Om AB är parallel med CD; så skola vinklarne

BGH+GHD = tvänne räta.

Bevis. Ty ... AGH=GHD . 1:o och således måste ...... AGH+BGH=BGH+GHD **2** axiom. Men .... AGH+BGH=tvänne räta **13** prop. alltså måste. BGH+GHD=tvänne räta, **1** axiom, h. s. b.

XXX Proposition. Theorem.

De räta lineer, som äro parallela med en och samma räta linea, äro sinsimellan parallela.

Låt AB vara parallel med EF, och CD vara parallel med EF; så skall AB vara parallel med CD.

Bevis. Vinkeln AKH=KHF **29** prop. 1:o, emedan AB antages vara parallel med EF; men emedan CD antages parallel med EF, måste KHF=KGD .... **29** prop. 2:o; alltså måste .... AKH=KGD ... **1** axiom. hvadan AB och

CD måste vara parallela, h. s. b. .... **27** prop.

XXXI Proposition. Problem.

Att genom en gifven punkt A draga en rät linea parallel med en gifven rät linea BC.

Drag räta lineen AD, så att hon skär BC, rita uti A, vid AD, en vinkel EAD=ADC;

Bevis, så måste, emedan alternatvinkeln EAD=ADC, lineerna EF och BC vara parallela, **27** prop. h. s. b.

XXXII Proposition. Theorem.

1:o *Om en sida uti en triangel utdrages så är den yttre vinkeln lika stor med de båda vinklarna tillhopatagna, som stå emot honom inuti triangeln.*

2:o *Uti hvar och en triangel äro alla tre vinklarne tillhopatagne lika stora med tvänne räta.*

1:o Låt ABC vara en triangel, och sidan BC vara utdragen; så skall det bevisas, att vinkeln ACD=A+B.

Drag CE parallel med AB .... **31** prop.

Bevis. Då måste den yttrevinkeln ECD=B **29** prop. **2:**o och alternatvinklarne .... ACE=A **29** prop. **1:**o;

Bevis. Emedan nyligen är bevist, att alternatvinkeln

AGH=GHD; och vinkeln AGH=EGB .... **15** prop.; så måste .... EGB=GHD; h. s. b. ... **1** axiom.

3:o Om AB är parallel med CD; så skola vinklarne

BGH+GHD = tvänne räta.

Bevis. Ty ... AGH=GHD . 1:o och således måste ...... AGH+BGH=BGH+GHD **2** axiom. Men .... AGH+BGH=tvänne räta **13** prop. alltså måste. BGH+GHD=tvänne räta, **1** axiom, h. s. b.

XXX Proposition. Theorem.

De räta lineer, som äro parallela med en och samma räta linea, äro sinsimellan parallela.

Låt AB vara parallel med EF, och CD vara parallel med EF; så skall AB vara parallel med CD.

Bevis. Vinkeln AKH=KHF **29** prop. 1:o, emedan AB antages vara parallel med EF; men emedan CD antages parallel med EF, måste KHF=KGD .... **29** prop. 2:o; alltså måste .... AKH=KGD ... **1** axiom. hvadan AB och CD måste vara parallela, h. s. b. .... **27** prop.

XXXI Proposition. Problem.

Att genom en gifven punkt A draga en rät linea parallel med en gifven rät linea BC.

Drag räta lineen AD, så att hon skär BC, rita uti A, vid AD, en vinkel EAD=ADC;

Bevis, så måste, emedan alternatvinkeln EAD=ADC, lineerna EF och BC vara parallela, **27** prop. h. s. b.

XXXII Proposition. Theorem.

1:o *Om en sida uti en triangel utdrages så är den yttre vinkeln lika stor med de båda vinklarna tillhopatagna, som stå emot honom inuti triangeln.*

2:o *Uti hvar och en triangel äro alla tre vinklarne tillhopatagne lika stora med tvänne räta.*

1:o Låt ABC vara en triangel, och sidan BC vara utdragen; så skall det bevisas, att vinkeln ACD=A+B.

Drag CE parallel med AB .... **31** prop.

Bevis. Då måste den yttrevinkeln ECD=B **29** prop. **2:**o och alternatvinklarne .... ACE=A **29**

prop. **1:**o;

Bevis. Emedan nyligen är bevist, att alternatvinkeln

AGH=GHD; och vinkeln AGH=EGB .... **15** prop.; så måste .... EGB=GHD; h. s. b. ... **1** axiom.

3:o Om AB är parallel med CD; så skola vinklarne

BGH+GHD = tvänne räta.

Bevis. Ty ... AGH=GHD . 1:o och således måste ...... AGH+BGH=BGH+GHD **2** axiom. Men .... AGH+BGH=tvänne räta **13** prop. alltså måste. BGH+GHD=tvänne räta, **1** axiom, h. s. b.

XXX Proposition. Theorem.

De räta lineer, som äro parallela med en och samma räta linea, äro sinsimellan parallela.

Låt AB vara parallel med EF, och CD vara parallel med EF; så skall AB vara parallel med CD.

Bevis. Vinkeln AKH=KHF **29** prop. 1:o, emedan AB antages vara parallel med EF; men emedan CD antages parallel med EF, måste KHF=KGD .... **29** prop. 2:o; alltså måste .... AKH=KGD ... **1** axiom. hvadan AB och CD måste vara parallela, h. s. b. .... **27** prop.

XXXI Proposition. Problem.

Att genom en gifven punkt A draga en rät linea parallel med en gifven rät linea BC.

Drag räta lineen AD, så att hon skär BC, rita uti A, vid AD, en vinkel EAD=ADC;

Bevis, så måste, emedan alternatvinkeln EAD=ADC, lineerna EF och BC vara parallela, **27** prop. h. s. b.

XXXII Proposition. Theorem.

1:o *Om en sida uti en triangel utdrages så är den yttre vinkeln lika stor med de båda vinklarna tillhopatagna, som stå emot honom inuti triangeln.*

2:o *Uti hvar och en triangel äro alla tre vinklarne tillhopatagne lika stora med tvänne räta.*

1:o Låt ABC vara en triangel, och sidan BC vara utdragen; så skall det bevisas, att vinkeln ACD=A+B.

Drag CE parallel med AB .... **31** prop.

Bevis. Då måste den yttrevinkeln ECD=B **29** prop. **2:**o och alternatvinklarne .... ACE=A **29** prop. **1:**o;

Bevis. Emedan nyligen är bevist, att alternatvinkeln

AGH=GHD; och vinkeln AGH=EGB .... **15** prop.; så måste .... EGB=GHD; h. s. b. ... **1** axiom.

3:o Om AB är parallel med CD; så skola vinklarne

BGH+GHD = tvänne räta.

Bevis. Ty ... AGH=GHD . 1:o och således måste ...... AGH+BGH=BGH+GHD **2** axiom. Men .... AGH+BGH=tvänne räta **13** prop. alltså måste. BGH+GHD=tvänne räta, **1** axiom, h. s. b.

XXX Proposition. Theorem.

De räta lineer, som äro parallela med en och samma räta linea, äro sinsimellan parallela.

Låt AB vara parallel med EF, och CD vara parallel med EF; så skall AB vara parallel med CD.

Bevis. Vinkeln AKH=KHF **29** prop. 1:o, emedan AB antages vara parallel med EF; men emedan CD antages parallel med EF, måste KHF=KGD .... **29** prop. 2:o; alltså måste .... AKH=KGD ... **1** axiom. hvadan AB och

CD måste vara parallela, h. s. b. .... **27** prop.

XXXI Proposition. Problem.

Att genom en gifven punkt A draga en rät linea parallel med en gifven rät linea BC.

Drag räta lineen AD, så att hon skär BC, rita uti A, vid AD, en vinkel EAD=ADC;

Bevis, så måste, emedan alternatvinkeln EAD=ADC, lineerna EF och BC vara parallela, **27** prop. h. s. b.

XXXII Proposition. Theorem.

1:o *Om en sida uti en triangel utdrages så är den yttre vinkeln lika stor med de båda vinklarna tillhopatagna, som stå emot honom inuti triangeln.*

2:o *Uti hvar och en triangel äro alla tre vinklarne tillhopatagne lika stora med tvänne räta.*

1:o Låt ABC vara en triangel, och sidan BC vara utdragen; så skall det bevisas, att vinkeln ACD=A+B.

Drag CE parallel med AB .... **31** prop.

Bevis. Då måste den yttrevinkeln ECD=B **29** prop. **2:**o och alternatvinklarne .... ACE=A **29** prop. **1:**o;

hvadan ...... ECD+ACE=A+B **2** axiom. d. v. s. .... ACD=A+B, h. s. b.

2:o Alla tre vinklarne A+B+ACB = tvänne räta.

Bevis. Emedan det är bevist, att .... ACD=A+B; så måste ACD+ACB=A+B+ACB .... **2** axiom. Men ... ACD+ACB= tvänne räta ...... **13**prop. Alltså måste äfven . A+B+ACB= tvänne räta, ... 2 axiom. [*note: kanske 12 axiom. eller 1+2] h. s. b.

1 Coroll. *Uti hvar och en triangel äro alla tre vinklarne, titthopatagne, lika stora med alla tre vinklarna, tillhopatagna uti hvar och en annan triangel.*

2 Coroll. *Om tvänne vinklar uti en triangel äro lika stora med tvänne vinklar uti en annan triangel; så är den tredje vinkeln uti den ena triangeln lika stor med den tredje vinkeln uti den andra.*

3 Coroll. *Om en vinkel uti en triangel är rät, så äro de båda öfriga tillsammantagne lika med en rät vinkel.*

4 Coroll. *Om den vinkeln, som omfattas af de lika sidorna uti en likbent triangel, är rät; så är hvar och en af de båda öfriga vinklarne en half rät vinkel.*

5 Coroll. *Uti en liksidig triangel är hvar och en af vinklarna lika med en tredjedel af* **2** *räta, eller två tredjedelar af en rät vinkel.*

XXXIII Proposition. Theorem.

De räta lineer, som sammanbinda parallela och lika stora räta lineer, på samma sida, äro sinsimellan parallela och lika stora.

Låt AB vara parallel och lika stor med CD, och låt AC och BD sammanbinda dem på samma sida: det skall bevisas, att AC är parallel och lika stor med BD.

Sammanbind punkterna C och B.

Bevis. Emedan AB antages vara lika stor med CD och BC är gemensam för båda trianglarna BAG och CDB, samt mellanliggande vinkeln ABC = BCD, eftersom det äfvenledes är antaget, att AB och CD äro parallela och dessa vinklar äro alternatvinklar, a: alltså måste, b, basen AC=BD, och vinkeln ACB, som står emot AB, vara lika stor med vinkeln CBD, som står emot den lika vara stora sidan CD.

a. **29** prop. b. **4** prop. c. **27** prop.

Efter således alternatvinkeln ACB=CBD, så måste AC äfven vara parallel med BD, c; h. s. b.

XXXIV Proposition. Theorem.

De sidor och vinklar, som stå midt emot hvarandra uti en parallelogram, äro lika stora, och diagonalen skär parallelogrammen midtitu.

hvadan ...... ECD+ACE=A+B **2** axiom. d. v. s. .... ACD=A+B, h. s. b.

2:o Alla tre vinklarne A+B+ACB = tvänne räta.

Bevis. Emedan det är bevist, att .... ACD=A+B; så måste ACD+ACB=A+B+ACB .... **2** axiom. Men ... ACD+ACB= tvänne räta ...... **13**prop. Alltså måste äfven . A+B+ACB= tvänne räta, ... 2 axiom. [*note: kanske 12 axiom. eller 1+2] h. s. b.

1 Coroll. *Uti hvar och en triangel äro alla tre vinklarne, titthopatagne, lika stora med alla tre vinklarna, tillhopatagna uti hvar och en annan triangel.*

2 Coroll. *Om tvänne vinklar uti en triangel äro lika stora med tvänne vinklar uti en annan triangel; så är den tredje vinkeln uti den ena triangeln lika stor med den tredje vinkeln uti den andra.*

3 Coroll. *Om en vinkel uti en triangel är rät, så äro de båda öfriga tillsammantagne lika med en rät vinkel.*

4 Coroll. *Om den vinkeln, som omfattas af de lika sidorna uti en likbent triangel, är rät; så är hvar och en af de båda öfriga vinklarne en half rät vinkel.*

5 Coroll. *Uti en liksidig triangel är hvar och en af vinklarna lika med en tredjedel af* **2** *räta, eller två tredjedelar af en rät vinkel.*

XXXIII Proposition. Theorem.

De räta lineer, som sammanbinda parallela och lika stora räta lineer, på samma sida, äro sinsimellan parallela och lika stora.

Låt AB vara parallel och lika stor med CD, och låt AC och BD sammanbinda dem på samma sida: det skall bevisas, att AC är parallel och lika stor med BD.

Sammanbind punkterna C och B.

Bevis. Emedan AB antages vara lika stor med CD och BC är gemensam för båda trianglarna BAG och CDB, samt mellanliggande vinkeln ABC = BCD, eftersom det äfvenledes är antaget, att AB och CD äro parallela och dessa vinklar äro alternatvinklar, a: alltså måste, b, basen AC=BD, och vinkeln ACB, som står emot AB, vara lika stor med vinkeln CBD, som står emot den lika vara stora sidan CD.

a. **29** prop. b. **4** prop. c. **27** prop.

Efter således alternatvinkeln ACB=CBD, så måste AC äfven vara parallel med BD, c; h. s. b.

XXXIV Proposition. Theorem.

De sidor och vinklar, som stå midt emot hvarandra uti en parallelogram, äro lika stora, och diagonalen skär parallelogrammen midtitu.

hvadan ...... ECD+ACE=A+B **2** axiom. d. v. s. .... ACD=A+B, h. s. b.

2:o Alla tre vinklarne A+B+ACB = tvänne räta.

Bevis. Emedan det är bevist, att .... ACD=A+B; så måste ACD+ACB=A+B+ACB .... **2** axiom. Men ... ACD+ACB= tvänne räta ...... **13**prop. Alltså måste äfven . A+B+ACB= tvänne räta, ... 2 axiom. [*note: kanske 12 axiom. eller 1+2] h. s. b.

1 Coroll. *Uti hvar och en triangel äro alla tre vinklarne, titthopatagne, lika stora med alla tre vinklarna, tillhopatagna uti hvar och en annan triangel.*

2 Coroll. *Om tvänne vinklar uti en triangel äro lika stora med tvänne vinklar uti en annan triangel; så är den tredje vinkeln uti den ena triangeln lika stor med den tredje vinkeln uti den andra.*

3 Coroll. *Om en vinkel uti en triangel är rät, så äro de båda öfriga tillsammantagne lika med en rät vinkel.*

4 Coroll. *Om den vinkeln, som omfattas af de lika sidorna uti en likbent triangel, är rät; så är hvar och en af de båda öfriga vinklarne en half rät vinkel.*

5 Coroll. *Uti en liksidig triangel är hvar och en af vinklarna lika med en tredjedel af* **2** *räta, eller två tredjedelar af en rät vinkel.*

XXXIII Proposition. Theorem.

De räta lineer, som sammanbinda parallela och lika stora räta lineer, på samma sida, äro sinsimellan parallela och lika stora.

Låt AB vara parallel och lika stor med CD, och låt AC och BD sammanbinda dem på samma sida: det skall bevisas, att AC är parallel och lika stor med BD.

Sammanbind punkterna C och B.

Bevis. Emedan AB antages vara lika stor med CD och BC är gemensam för båda trianglarna BAG och CDB, samt mellanliggande vinkeln ABC = BCD, eftersom det äfvenledes är antaget, att AB och CD äro parallela och dessa vinklar äro alternatvinklar, a: alltså måste, b, basen AC=BD, och vinkeln ACB, som står emot AB, vara lika stor med vinkeln CBD, som står emot den lika vara stora sidan CD.

a. **29** prop. b. **4** prop. c. **27** prop.

Efter således alternatvinkeln ACB=CBD, så måste AC äfven vara parallel med BD, c; h. s. b.

XXXIV Proposition. Theorem.

De sidor och vinklar, som stå midt emot hvarandra uti en parallelogram, äro lika stora, och diagonalen skär parallelogrammen midtitu.

Låt AD vara en parallelogram, och dess diagonal, BC, vara dragen: det skall bevisas, att AB=CD, AC=BD, att vinkeln A=D, att vinkeln ACD=ABD; samt att triangeln ABC=triangeln BCD.

Bevis. Emedan AD är en parallelogram, så måste sidan AB vara parallel med CD, och AC parallel med BD, a; således måste alternatvinkeln ABC=BCD, b, och alternatvinkeln CBD=BCA, b; samt till följe deraf hela vinkeln ABD=ACD, c; Uti de båda trianglarna ABC, BCD, således tvänne vinklar ACB och ABC samt mellanliggande sidan BC, ut den ena, lika stora med hvar sin af vinklarna CBD och BCD, samt mellanliggande sidan BC uti den andra; derföre måste AB=CD, sidan AC=BD, samt vinkeln A=D, d. Alltså äro de motstående sidorna och vinklarne lika stora; h. s. b.

a. **22** defin. b. **29** prop. c. **2** axiom. d. **26** prop. e. **4** prop.

Vidare, efter sidan AB=CD, sidan AC=BD och mellanliggande vinkeln A=D; så måste triangeln ABC=BCD, e. Alltså skär diagonalen parallelogrammer midtitu; h. s. b.

XXXV Proposition. Theorem.

De parallelogrammer, som stå på samma bas och imellan samma parallela lineer, äro lika stora.

Låt AC och EC vara tvänne parallelogrammer som stå på samma bas, BC, och imellan samma parallela lineer, BC och AF; så skall det bevisas, att parallelogrammen AC=EC.

Bevis. Emedan AD=BC, och EF=BC, a, så måste AD=EF, b; och således, om DE lägges till på båda ställen,

AE=DF c. Dessutom är AB=CD, a, och den yttre vinkeln CDF=BAB, som står emot honom innantill på samma sida om, emedan AB och DC äro parallela, e. Således äro tvänne sidor och mellanliggande vinkeln, uti triangeln ABE, lika stora med hvar sin sida och mellanliggande vinkeln uti triangeln CDF; derföre måste triangeln ABE=CDF, f.

a. **34** prop. b. **1** axiom. c. **2** axiom. d. **29** prop. e. **22** defin. f. **4** prop. g. **3** axiom.

Tager man då bort triangeln DGE, g, och lägger till triangeln BGC, c, på båda ställen; så blifver parallelogrammen AC=EC, h. s. b.

Om punkten E faller imellan A och D; användes följande

Bevis. Sidan AD BC, och EF=BC, a; derföre är AD=EF, b; och således AB=DF, g, när man på båda ställen tager bort den gemensamma delen ED. Sidan AB=CD, a, och vinkeln BAE=CDF, d; derföre måste triangeln ABE=DCF; f; så att, om man lägger Låt AD vara en parallelogram, och dess diagonal, BC, vara dragen: det skall bevisas, att AB=CD, AC=BD, att vinkeln A=D, att vinkeln ACD=ABD; samt att triangeln ABC=triangeln BCD.

Bevis. Emedan AD är en parallelogram, så måste sidan AB vara parallel med CD, och AC parallel med BD, a; således måste alternatvinkeln ABC=BCD, b, och alternatvinkeln CBD=BCA, b; samt till följe deraf hela vinkeln ABD=ACD, c; Uti de båda trianglarna ABC, BCD, således tvänne vinklar ACB och ABC samt mellanliggande sidan BC, ut den ena, lika stora med hvar sin af vinklarna CBD och BCD, samt mellanliggande sidan BC uti den andra; derföre måste AB=CD, sidan AC=BD, samt vinkeln A=D, d. Alltså äro de motstående sidorna och vinklarne lika stora; h. s. b.

a. **22** defin. b. **29** prop. c. **2** axiom. d. **26** prop. e. **4** prop.

Vidare, efter sidan AB=CD, sidan AC=BD och mellanliggande vinkeln A=D; så måste triangeln ABC=BCD, e. Alltså skär diagonalen parallelogrammer midtitu; h. s. b.

XXXV Proposition. Theorem.

De parallelogrammer, som stå på samma bas och imellan samma parallela lineer, äro lika stora.

Låt AC och EC vara tvänne parallelogrammer som stå på samma bas, BC, och imellan samma parallela lineer, BC och AF; så skall det bevisas, att parallelogrammen AC=EC.

Bevis. Emedan AD=BC, och EF=BC, a, så måste AD=EF, b; och således, om DE lägges till på båda ställen,
AE=DF c. Dessutom är AB=CD, a, och den yttre vinkeln CDF=BAB, som står emot honom innantill på samma sida om, emedan AB och DC äro parallela, e. Således äro tvänne sidor och mellanliggande vinkeln, uti triangeln ABE, lika stora med hvar sin sida och mellanliggande vinkeln uti triangeln CDF; derföre måste triangeln ABE=CDF, f.

a. **34** prop. b. **1** axiom. c. **2** axiom. d. **29** prop. e. **22** defin. f. **4** prop. g. **3** axiom.

Tager man då bort triangeln DGE, g, och lägger till triangeln BGC, c, på båda ställen; så blifver parallelogrammen AC=EC, h. s. b.

Om punkten E faller imellan A och D; användes följande

Bevis. Sidan AD BC, och EF=BC, a; derföre är AD=EF, b; och således AB=DF, g, när man på båda ställen tager bort den gemensamma delen ED. Sidan AB=CD, a, och vinkeln BAE=CDF, d; derföre måste triangeln
ABE=DCF; f; så att, om man läggertrapezium EBCD till på båda ställen, blifver parallelogrammen ABCD = parallelogrammen EBCF, c; h. s. b.

Om punkten E faller in på punkten D; så är det tydligt, att, emedan diagonalen BD skär parallelogrammen AC midtitu, och diagonalen DC skär parallelogram men BF midtitu, båda dessa parallelogrammer äro hvardera dubbelt så stora, som triangeln BDC; hvadan de äfven, **6** axiom., måste vara sinsimellan lika stora; h. s. b.

XXXVI Proposition. Theorem.

De parallelogrammer, som stå på lika stora baser och imellan samma parallela lineer, äro lika stora.

Låt AC och EH vara tvänne parallelogrammer, som stå på lika stora baser BC och GH, samt imellan samma parallela lineer BH och AF; det skall bevisas, att parallelogrammen AC = EH.

Sammanbind E och B, samt F och C.

Bevis. Emedan BC antages vara lika stor med GH, och GH=EF, a; så måste BC=EF, b. Räta lineerna EB och FC, hvilka således sammanbinda de parallela och lika stora räta lineerna BC och EF, måste derföre sinsimellan vara parallela, c. Alltså är EC en parallelogram.

a. **84** prop. b. **1** axiom, c. **33** prop. d. **35** prop.

Nu är parallelogr, AC=EC, d; och parallelogr. EC=EH, d; emedan de stå på samma bas EF och imellan samma parallela lineer; derföre måste äfven AC=EH, b; h. s. b.

XXXVII Proposition. Theorem.

De trianglar, som stå på samma bas och imellan samma parallela lineer, äro lika stora.

Låt ABC och DEC vara tvänne trianglar, som stå på samma bas BC, och imellan samma parallela lineer AD och BC; så skall det bevisas, att triangeln ABC = DEC.

Bevis. Drag CE parallel med AB, och CF parallel med BD, a; drag ut AD till F.

Då äro ABCE och DBCF tvänne lika stora parallelogrammer, b. Men triangeln ABC är hälften af parallelogr. ABCE, och DEC är hälften af parallelogr. DBCF, c; derföre måste triangeln ABC=DEC, d; h. s. b.

a. **31** prop. b. **35** prop. c. **34** prop. d. **7** axiom.

XXXVIII Proposition Theorem.

De trianglar, som stå på lika stora baser och imellan samma parallela lineer, äro lika stora.

trapezium EBCD till på båda ställen, blifver parallelogrammen ABCD = parallelogrammen EBCF, c; h. s. b.

Om punkten E faller in på punkten D; så är det tydligt, att, emedan diagonalen BD skär parallelogrammen AC midtitu, och diagonalen DC skär parallelogram men BF midtitu, båda dessa parallelogrammer äro hvardera dubbelt så stora, som triangeln BDC; hvadan de äfven, **6** axiom., måste vara sinsimellan lika stora; h. s. b.

XXXVI Proposition. Theorem.

De parallelogrammer, som stå på lika stora baser och imellan samma parallela lineer, äro lika stora.

Låt AC och EH vara tvänne parallelogrammer, som stå på lika stora baser BC och GH, samt imellan samma parallela lineer BH och AF; det skall bevisas, att parallelogrammen AC = EH.

Sammanbind E och B, samt F och C.

Bevis. Emedan BC antages vara lika stor med GH, och GH=EF, a; så måste BC=EF, b. Räta lineerna EB och FC, hvilka således sammanbinda de parallela och lika stora räta lineerna BC och EF, måste derföre sinsimellan vara parallela, c. Alltså är EC en parallelogram.

a. **84** prop. b. **1** axiom, c. **33** prop. d. **35** prop.

Nu är parallelogr, AC=EC, d; och parallelogr. EC=EH, d; emedan de stå på samma bas EF och imellan samma parallela lineer; derföre måste äfven AC=EH, b; h. s. b.

XXXVII Proposition. Theorem.

De trianglar, som stå på samma bas och imellan samma parallela lineer, äro lika stora.

Låt ABC och DEC vara tvänne trianglar, som stå på samma bas BC, och imellan samma parallela lineer AD och BC; så skall det bevisas, att triangeln ABC = DEC.

Bevis. Drag CE parallel med AB, och CF parallel med BD, a; drag ut AD till F.

Då äro ABCE och DBCF tvänne lika stora parallelogrammer, b. Men triangeln ABC är hälften af parallelogr. ABCE, och DEC är hälften af parallelogr. DBCF, c; derföre måste triangeln ABC=DEC, d; h. s. b.

a. **31** prop. b. **35** prop. c. **34** prop. d. **7** axiom.

XXXVIII Proposition Theorem.

De trianglar, som stå på lika stora baser och imellan samma parallela lineer, äro lika stora.

trapezium EBCD till på båda ställen, blifver parallelogrammen ABCD = parallelogrammen EBCF, c; h. s. b.

Om punkten E faller in på punkten D; så är det tydligt, att, emedan diagonalen BD skär parallelogrammen AC midtitu, och diagonalen DC skär parallelogram men BF midtitu, båda dessa parallelogrammer äro hvardera dubbelt så stora, som triangeln BDC; hvadan de äfven, **6** axiom., måste vara sinsimellan lika stora; h. s. b.

XXXVI Proposition. Theorem.

De parallelogrammer, som stå på lika stora baser och imellan samma parallela lineer, äro lika stora.

Låt AC och EH vara tvänne parallelogrammer, som stå på lika stora baser BC och GH, samt imellan samma parallela lineer BH och AF; det skall bevisas, att parallelogrammen AC = EH.

Sammanbind E och B, samt F och C.

Bevis. Emedan BC antages vara lika stor med GH, och GH=EF, a; så måste BC=EF, b. Räta lineerna EB och FC, hvilka således sammanbinda de parallela och lika stora räta lineerna BC och EF, måste derföre sinsimellan vara parallela, c. Alltså är EC en parallelogram.

a. **84** prop. b. **1** axiom, c. **33** prop. d. **35** prop.

Nu är parallelogr, AC=EC, d; och parallelogr. EC=EH, d; emedan de stå på samma bas EF och imellan samma parallela lineer; derföre måste äfven AC=EH, b; h. s. b.

XXXVII Proposition. Theorem.

De trianglar, som stå på samma bas och imellan samma parallela lineer, äro lika stora.

Låt ABC och DEC vara tvänne trianglar, som stå på samma bas BC, och imellan samma parallela lineer AD och BC; så skall det bevisas, att triangeln ABC = DEC.

Bevis. Drag CE parallel med AB, och CF parallel med BD, a; drag ut AD till F.

Då äro ABCE och DBCF tvänne lika stora parallelogrammer, b. Men triangeln ABC är hälften af parallelogr. ABCE, och DEC är hälften af parallelogr. DBCF, c; derföre måste triangeln ABC=DEC, d; h. s. b.

a. **31** prop. b. **35** prop. c. **34** prop. d. **7** axiom.

XXXVIII Proposition Theorem.

De trianglar, som stå på lika stora baser och imellan samma parallela lineer, äro lika stora.

trapezium EBCD till på båda ställen, blifver parallelogrammen ABCD = parallelogrammen EBCF, c; h. s. b.

Om punkten E faller in på punkten D; så är det tydligt, att, emedan diagonalen BD skär parallelogrammen AC midtitu, och diagonalen DC skär parallelogram men BF midtitu, båda dessa parallelogrammer äro hvardera dubbelt så stora, som triangeln BDC; hvadan de äfven, **6** axiom., måste vara sinsimellan lika stora; h. s. b.

XXXVI Proposition. Theorem.

De parallelogrammer, som stå på lika stora baser och imellan samma parallela lineer, äro lika stora.

Låt AC och EH vara tvänne parallelogrammer, som stå på lika stora baser BC och GH, samt imellan samma

parallela lineer BH och AF; det skall bevisas, att parallelogrammen AC = EH.

Sammanbind E och B, samt F och C.

Bevis. Emedan BC antages vara lika stor med GH, och GH=EF, a; så måste BC=EF, b. Räta lineerna EB och FC, hvilka således sammanbinda de parallela och lika stora räta lineerna BC och EF, måste derföre sinsimellan vara parallela, c. Alltså är EC en parallelogram.

a. **84** prop. b. **1** axiom, c. **33** prop. d. **35** prop.

Nu är parallelogr, AC=EC, d; och parallelogr. EC=EH, d; emedan de stå på samma bas EF och imellan samma parallela lineer; derföre måste äfven AC=EH, b; h. s. b.

XXXVII Proposition. Theorem.

De trianglar, som stå på samma bas och imellan samma parallela lineer, äro lika stora.

Låt ABC och DEC vara tvänne trianglar, som stå på samma bas BC, och imellan samma parallela lineer AD och BC; så skall det bevisas, att triangeln ABC = DEC.

Bevis. Drag CE parallel med AB, och CF parallel med BD, a; drag ut AD till F.

Då äro ABCE och DBCF tvänne lika stora parallelogrammer, b. Men triangeln ABC är hälften af parallelogr. ABCE, och DEC är hälften af parallelogr. DBCF, c; derföre måste triangeln ABC=DEC, d; h. s. b.

a. **31** prop. b. **35** prop. c. **34** prop. d. **7** axiom.

XXXVIII Proposition Theorem.

De trianglar, som stå på lika stora baser och imellan samma parallela lineer, äro lika stora.

Låt ABC och DCE vara tvänne trianglar, som stå på lika stora baser BB och CE, och imellan samma parallela lineer BE och AD: det skall bevisas, att triangeln ABC=DCE.

Bevis. Drag BG parallel med AC, a, och EH parallel med CD, a; drag ut AD till G och H.

Då är parallelogrammen GC = CH; b; men triangeln ABC är hälften af GC, och, triangeln DCE är hälften af CH, c; Derföre måste triangeln ABC = DCE, d;, h. s. b.

a. **31** prop. b. **36** prop. c. **34** prop. d. **7** axiom.

XXVIX Proposition. Theorem.

De trianglar, som äro lika stora, och stå på samma bas, åt samma sida, äro imellan samma parallela lineer.

Låt CAB och DAB vara tvänne lika stora trianglar, som stå på samma bas AB, och låt räta lineen CD vara dragen; så skall det bevisas, att CD är parallel med AB.

Bevis. Ty om icke CD är parallel med AB; så drag CF parallel med AB, a; och drag BF. Då äro CAB och FAB tvänne trianglar, som stå på samma bas, AB, och prop. imellan samma parallela lineer, AB och CF; derföre måste triangeln CAB=FAB, b. Men nu är det antaget, att triangeln CAB = DAB; således skulle FAB = DAB, c, en del med sitt hela, hvilket är omöjligt, d. Derföre kan icke CF vara parallel med AB. På samma sätt bevises, att ingen annan rät linea, som drages genom C, kan vara parallel med AB, utom CD. Alltså är CD parallel med AB. h. s. b.

a. **31** prop. b. **37** prop. c. **1** axiom. d. **9** axiom.

XL Proposition. Theorem.

De trianglar, som äro lika stora, och stå på lika stora baser, på samma räta linea, åt samma sida, äro imellan samma parallela lineer.

Låt ABC och GDE vara tvänne trianglar, som äro lika stora, och stå på lika stora baser AB och DE, samt på

samma räta linea AE: det skall bevisas, att, om CG drages, AE är parallel med CG.

Bevis. Ty låt, om det vore möjligt, CF vara parallel med AE; drag EF.

a. **38** prop. b. **1** axiom. c. **9** axiom.

Då måste triangeln ABC=DEF, a; men det är antaget, att ABC = GDE; således skulle DEF = GDE, b; och då det är omöjligt, c, kan ej heller CF vara parallel med AE. På samma sätt

Låt ABC och DCE vara tvänne trianglar, som stå på lika stora baser BB och CE, och imellan samma parallela lineer BE och AD: det skall bevisas, att triangeln ABC=DCE.

Bevis. Drag BG parallel med AC, a, och EH parallel med CD, a; drag ut AD till G och H.

Då är parallelogrammen GC = CH; b; men triangeln ABC är hälften af GC, och, triangeln DCE är hälften af CH, c; Derföre måste triangeln ABC = DCE, d;, h. s. b.

a. **31** prop. b. **36** prop. c. **34** prop. d. **7** axiom.

XXVIX Proposition. Theorem.

De trianglar, som äro lika stora, och stå på samma bas, åt samma sida, äro imellan samma parallela lineer.

Låt CAB och DAB vara tvänne lika stora trianglar, som stå på samma bas AB, och låt räta lineen CD vara dragen; så skall det bevisas, att CD är parallel med AB.

Bevis. Ty om icke CD är parallel med AB; så drag CF parallel med AB, a; och drag BF. Då äro CAB och FAB tvänne trianglar, som stå på samma bas, AB, och prop. imellan samma parallela lineer, AB och CF; derföre måste triangeln CAB=FAB, b. Men nu är det antaget, att triangeln CAB = DAB; således skulle FAB = DAB, c, en del med sitt hela, hvilket är omöjligt, d. Derföre kan icke CF vara parallel med AB. På samma sätt bevises, att ingen annan rät linea, som drages genom C, kan vara parallel med AB, utom CD. Alltså är CD parallel med AB. h. s. b.

a. **31** prop. b. **37** prop. c. **1** axiom. d. **9** axiom.

XL Proposition. Theorem.

De trianglar, som äro lika stora, och stå på lika stora baser, på samma räta linea, åt samma sida, äro imellan samma parallela lineer.

Låt ABC och GDE vara tvänne trianglar, som äro lika stora, och stå på lika stora baser AB och DE, samt på samma räta linea AE: det skall bevisas, att, om CG drages, AE är parallel med CG.

Bevis. Ty låt, om det vore möjligt, CF vara parallel med AE; drag EF.

a. **38** prop. b. **1** axiom. c. **9** axiom.

Då måste triangeln ABC=DEF, a; men det är antaget, att ABC = GDE; således skulle DEF = GDE, b; och då det är omöjligt, c, kan ej heller CF vara parallel med AE. På samma sätt

Låt ABC och DCE vara tvänne trianglar, som stå på lika stora baser BB och CE, och imellan samma parallela lineer BE och AD: det skall bevisas, att triangeln ABC=DCE.

Bevis. Drag BG parallel med AC, a, och EH parallel med CD, a; drag ut AD till G och H.

Då är parallelogrammen GC = CH; b; men triangeln ABC är hälften af GC, och, triangeln DCE är hälften af CH, c; Derföre måste triangeln ABC = DCE, d;, h. s. b.

a. **31** prop. b. **36** prop. c. **34** prop. d. **7** axiom.

XXVIX Proposition. Theorem.

De trianglar, som äro lika stora, och stå på samma bas, åt samma sida, äro imellan samma parallela lineer.

Låt CAB och DAB vara tvänne lika stora trianglar, som stå på samma bas AB, och låt räta lineen CD vara dragen; så skall det bevisas, att CD är parallel med AB.

Bevis. Ty om icke CD är parallel med AB; så drag CF parallel med AB, a; och drag BF. Då äro CAB och FAB tvänne trianglar, som stå på samma bas, AB, och prop. imellan samma parallela lineer, AB och CF; derföre måste triangeln CAB=FAB, b. Men nu är det antaget, att triangeln CAB = DAB; således skulle FAB = DAB, c, en del med sitt hela, hvilket är omöjligt, d. Derföre kan icke CF vara parallel med AB. På samma sätt bevises, att ingen annan rät linea, som drages genom C, kan vara parallel med AB, utom CD. Alltså är CD parallel med AB. h. s. b.

a. **31** prop. b. **37** prop. c. **1** axiom. d. **9** axiom.

XL Proposition. Theorem.

De trianglar, som äro lika stora, och stå på lika stora baser, på samma räta linea, åt samma sida, äro imellan samma parallela lineer.

Låt ABC och GDE vara tvänne trianglar, som äro lika stora, och stå på lika stora baser AB och DE, samt på samma räta linea AE: det skall bevisas, att, om CG drages, AE är parallel med CG.

Bevis. Ty låt, om det vore möjligt, CF vara parallel med AE; drag EF.

a. **38** prop. b. **1** axiom. c. **9** axiom.

Då måste triangeln ABC=DEF, a; men det är antaget, att ABC = GDE; således skulle DEF = GDE, b; och då det är omöjligt, c, kan ej heller CF vara parallel med AE. På samma sätt

bevises, att ingen annan rät linea genom C, utom CG, kan vara parallel med AE. Alltså är AE parallel med CG, h. s. b

XLI Proposition. Theorem

Om en parallelogram ABCD, och en triangel, EBC stå på samma bas, BC, och imellan samma parallela lineer, BC och AE; så skall parallelogr. ABCD vara dubbelt så stor, som triangeln EBC.

Bevis. Drag räta lineen AC.

Parallelogrammen ABCD är dubbelt så stor, som triangeln ABC, a, och triang. ABC=EBC, b; derföre måste parallelogr ABCD äfven vara dubbelt så stor, som triangeln EBC, h. s. b.

a. **34** prop. b. **37** prop.

XLII. Proposition. Problem.

Att upprita en parallelogram, som är lika stor med en gifven triangel, och som har en vinkel lika stor med en gifven vinkel.

Låt ABC vara den gifna triangeln, och D den gifna vinkeln: en parallelogram skall uppritas, som är lika stor med triangeln ABC, och som har en vinkel=D.

Skär BC midtitu ut E, a, rita uti E, vid EC, vinkeln FEC=D, b, drag CG parallel med EF, c, och AG parallel med BC; så blifver EG en parallelogram, d, hvilken är lika stor med triangeln ABC.

Bevis. Drag räta lineen AE.

Triangeln ABE = AEC, e; således är triangeln ABC dubbelt så stor, som AEC. Men parallelogrammen EG är äfven dubbelt så stor, som triangeln AEC, f; derföre måste parallelogr. EC vara lika stor med triangeln ABC, g, h. s. b.

a. **10** prop b. **23** prop. c. **31** prop. d. **22** defin. e. **38** prop. f. **41** prop. g. **6** axiom.

Om man genom någon punkt, F, på diagonalen uti en parallelogram, drager tvänne räta lineer GH och EK.,

parallela med parallelogrammens sidor; så blifver derigenom parallelogrammen ABCD delad uti fyra parallelogrammer GE, KH, FB och DF. Af dessa sägas GE och KH stå omkring diagonalen; och de båjla öfriga, FB och DF sägas vara *Fyllnader till de parallelogrammer, som stå omkring diagonalen.* (Se följande figur).

XXIII Proposition. Theorem.

Uti hvar och en parallelogram, ABCD, äro fyllnaderna, DF och FB, till de parallelogrammer, som stå omkring diagonalen, lika stora.

bevises, att ingen annan rät linea genom C, utom CG, kan vara parallel med AE. Alltså är AE parallel med CG, h. s. b

XLI Proposition. Theorem

Om en parallelogram ABCD, och en triangel, EBC stå på samma bas, BC, och imellan samma parallela lineer, BC och AE; så skall parallelogr. ABCD vara dubbelt så stor, som triangeln EBC.

Bevis. Drag räta lineen AC.

Parallelogrammen ABCD är dubbelt så stor, som triangeln ABC, a, och triang. ABC=EBC, b; derföre måste parallelogr ABCD äfven vara dubbelt så stor, som triangeln EBC, h. s. b.

a. **34** prop. b. **37** prop.

XLII. Proposition. Problem.

Att upprita en parallelogram, som är lika stor med en gifven triangel, och som har en vinkel lika stor med en gifven vinkel.

Låt ABC vara den gifna triangeln, och D den gifna vinkeln: en parallelogram skall uppritas, som är lika stor med triangeln ABC, och som har en vinkel=D.

Skär BC midtitu ut E, a, rita uti E, vid EC, vinkeln FEC=D, b, drag CG parallel med EF, c, och AG parallel med BC; så blifver EG en parallelogram, d, hvilken är lika stor med triangeln ABC.

Bevis. Drag räta lineen AE.

Triangeln ABE = AEC, e; således är triangeln ABC dubbelt så stor, som AEC. Men parallelogrammen EG är äfven dubbelt så stor, som triangeln AEC, f; derföre måste parallelogr. EC vara lika stor med triangeln ABC, g, h. s. b.

a. **10** prop b. **23** prop. c. **31** prop. d. **22** defin. e. **38** prop. f. **41** prop. g. **6** axiom.

Om man genom någon punkt, F, på diagonalen uti en parallelogram, drager tvänne räta lineer GH och EK.,
parallela med parallelogrammens sidor; så blifver derigenom parallelogrammen ABCD delad uti fyra parallelogrammer GE, KH, FB och DF. Af dessa sägas GE och KH stå omkring diagonalen; och de båjla öfriga, FB och DF sägas vara *Fyllnader till de parallelogrammer, som stå omkring diagonalen.* (Se följande figur).

XXIII Proposition. Theorem.

Uti hvar och en parallelogram, ABCD, äro fyllnaderna, DF och FB, till de parallelogrammer, som stå omkring diagonalen, lika stora.

bevises, att ingen annan rät linea genom C, utom CG, kan vara parallel med AE. Alltså är AE parallel med CG, h. s. b

XLI Proposition. Theorem

Om en parallelogram ABCD, och en triangel, EBC stå på samma bas, BC, och imellan samma parallela lineer, BC och AE; så skall parallelogr. ABCD vara dubbelt så stor, som triangeln EBC.

Bevis. Drag räta lineen AC.

Parallelogrammen ABCD är dubbelt så stor, som triangeln ABC, a, och triang. ABC=EBC, b; derföre måste parallelogr ABCD äfven vara dubbelt så stor, som triangeln EBC, h. s. b.

a. **34** prop. b. **37** prop.

XLII. Proposition. Problem.

Att upprita en parallelogram, som är lika stor med en gifven triangel, och som har en vinkel lika stor med en gifven vinkel.

Låt ABC vara den gifna triangeln, och D den gifna vinkeln: en parallelogram skall uppritas, som är lika stor med triangeln ABC, och som har en vinkel=D.

Skär BC midtitu ut E, a, rita uti E, vid EC, vinkeln FEC=D, b, drag CG parallel med EF, c, och AG parallel med BC; så blifver EG en parallelogram, d, hvilken är lika stor med triangeln ABC.

Bevis. Drag räta lineen AE.

Triangeln ABE = AEC, e; således är triangeln ABC dubbelt så stor, som AEC. Men parallelogrammen EG är äfven dubbelt så stor, som triangeln AEC, f; derföre måste parallelogr. EC vara lika stor med triangeln ABC, g, h. s. b.

a. **10** prop b. **23** prop. c. **31** prop. d. **22** defin. e. **38** prop. f. **41** prop. g. **6** axiom.

Om man genom någon punkt, F, på diagonalen uti en parallelogram, drager tvänne räta lineer GH och EK., parallela med parallelogrammens sidor; så blifver derigenom parallelogrammen ABCD delad uti fyra parallelogrammer GE, KH, FB och DF. Af dessa sägas GE och KH stå omkring diagonalen; och de båjla öfriga, FB och DF sägas vara *Fyllnader till de parallelogrammer, som stå omkring diagonalen.* (Se följande figur).

XXIII Proposition. Theorem.

Uti hvar och en parallelogram, ABCD, äro fyllnaderna, DF och FB, till de parallelogrammer, som stå omkring diagonalen, lika stora.

bevises, att ingen annan rät linea genom C, utom CG, kan vara parallel med AE. Alltså är AE parallel med CG, h. s. b

XLI Proposition. Theorem

Om en parallelogram ABCD, och en triangel, EBC stå på samma bas, BC, och imellan samma parallela lineer, BC och AE; så skall parallelogr. ABCD vara dubbelt så stor, som triangeln EBC.

Bevis. Drag räta lineen AC.

Parallelogrammen ABCD är dubbelt så stor, som triangeln ABC, a, och triang. ABC=EBC, b; derföre måste parallelogr ABCD äfven vara dubbelt så stor, som triangeln EBC, h. s. b.

a. **34** prop. b. **37** prop.

XLII. Proposition. Problem.

Att upprita en parallelogram, som är lika stor med en gifven triangel, och som har en vinkel lika stor med en gifven vinkel.

Låt ABC vara den gifna triangeln, och D den gifna vinkeln: en parallelogram skall uppritas, som är lika stor med triangeln ABC, och som har en vinkel=D.

Skär BC midtitu ut E, a, rita uti E, vid EC, vinkeln FEC=D, b, drag CG parallel med EF, c, och AG parallel med BC; så blifver EG en parallelogram, d, hvilken är lika stor med triangeln ABC.

Bevis. Drag räta lineen AE.

Triangeln ABE = AEC, e; således är triangeln ABC dubbelt så stor, som AEC. Men parallelogrammen EG är äfven dubbelt så stor, som triangeln AEC, f; derföre måste parallelogr. EC vara lika stor med triangeln ABC, g, h. s. b.

a. **10** prop b. **23** prop. c. **31** prop. d. **22** defin. e. **38** prop. f. **41** prop. g. **6** axiom.

Om man genom någon punkt, F, på diagonalen uti en parallelogram, drager tvänne räta lineer GH och EK., parallela med parallelogrammens sidor; så blifver derigenom parallelogrammen ABCD delad uti fyra parallelogrammer GE, KH, FB och DF. Af dessa sägas GE och KH stå omkring diagonalen; och de båjla öfriga, FB och DF sägas vara *Fyllnader till de parallelogrammer, som stå omkring diagonalen.* (Se följande figur).

XXIII Proposition. Theorem.

Uti hvar och en parallelogram, ABCD, äro fyllnaderna, DF och FB, till de parallelogrammer, som stå omkring diagonalen, lika stora.

a. **34** prop. b. **2** axiom. c. **3** axiom.

Bevis. Triangeln ABC=ADC, a, och triangeln AEF=AGF, a, samt triangeln FHC=FKC, a. Derföre måste trianglarne AEF+FHC=AGF+FKC, b; och om man då tager bort dessa tvänne trianglar från hvardera af de lika stora trianglarne ABC och ADC; så återstår parallelogrammen FB=DF, c; h. s. b.

En parallelogram säges vara applicerad till en rät linea, då denna räta linea är en sida uti honom.

XLIV Proposition. Problem.

Att till en gifven rät linea , AB, applicera en parallelogram som är lika stor med en gifven triangel CFH, och som har en vinkel, lika stor med en gifven vinkel D.

Uppritа en parallelogram GK=CFH, och som har en vinkel GBK=D, a. Ställ denna parallelogram så, att en af hans sidor, BK, kommer uti rät linea med AB. Drag ut NG, och drag A Q parallel med GB eller LN, b; sammanbind Q och B.

Emedan nu AQ och LN äro parallela, så måste vinklarne LNQ+NQA=tvänne räta, c , och således vinklarne LNQ+NQB<tvänne räta; hvadan QB och NL måste råkas, om de utdragas åt B och L, d.

Låt dem vara utdragna och råkas i L. Drag LP parallel med NQ, och drag ut GB och QA till M och Så skall det bevisas, att BP är den begärdta parallelogrammen.

a. **42** prop. b. **31** prop. c. **29** prop. d. **12** axiom. e. **43** prop. f. **1** axiom. g. **15** prop. Bevis. Parallelogrammen BP= GK, e, och GK är gjord = triangeln CFH; derföre måste äfven BP=CFH, f; h. s. b.

Vinkeln ABM=GBK, g; och GBK=D; derföre måste äfven ABM=D, f; h. s. b.

XLV Proposition. Problem.

Att uppritа en parallelogram, som är lika stor med en gifven rätlinig figur, och som har en gifven vinkel.

Dela den gifna rätliniga figuren, genom diagonaler, uti trianglar A, B, C. Uppritа en parallelogram, DG, som är lika stor med triangeln A, och som har en vinkel, D, lika stor med den gifna vinkeln, F, a. Applicera sedan till GH en parallelogram, som är lika stor med B, och som har en vinkel GHK=F. Applicera vidare till KM en parallelogram, KN, som är lika stor med C, och som har vinkeln MKL=F, b: så skall det bevisas, att figuren EL är en parallelogram, som är lika stor med den gifna rätliniga figuren.

a. **34** prop. b. **2** axiom. c. **3** axiom.

Bevis. Triangeln ABC=ADC, a, och triangeln AEF=AGF, a, samt triangeln FHC=FKC, a. Derföre måste trianglarne AEF+FHC=AGF+FKC, b; och om man då tager bort dessa tvänne trianglar från hvardera af de lika stora trianglarne ABC och ADC; så återstår parallelogrammen FB=DF, c; h. s. b.

En parallelogram säges vara applicerad till en rät linea, då denna räta linea är en sida uti honom.

XLIV Proposition. Problem.

Att till en gifven rät linea , AB, applicera en parallelogram som är lika stor med en gifven triangel CFH, och som har en vinkel, lika stor med en gifven vinkel D.

Upprita en parallelogram GK=CFH, och som har en vinkel GBK=D, a. Ställ denna parallelogram så, att en af hans sidor, BK, kommer uti rät linea med AB. Drag ut NG, och drag A Q parallel med GB eller LN, b; sammanbind Q och B.

Emedan nu AQ och LN äro parallela, så måste vinklarne LNQ+NQA=tvänne räta, c , och således vinklarne LNQ+NQB<tvänne räta; hvadan QB och NL måste råkas, om de utdragas åt B och L, d.

Låt dem vara utdragna och råkas i L. Drag LP parallel med NQ, och drag ut GB och QA till M och Så skall det bevisas, att BP är den begärdta parallelogrammen.

a. **42** prop. b. **31** prop. c. **29** prop. d. **12** axiom. e. **43** prop. f. **1** axiom. g. **15** prop. Bevis. Parallelogrammen BP= GK, e, och GK är gjord = triangeln CFH; derföre måste äfven BP=CFH, f; h. s. b.

Vinkeln ABM=GBK, g; och GBK=D; derföre måste äfven ABM=D, f; h. s. b.

XLV Proposition. Problem.

Att upprita en parallelogram, som är lika stor med en gifven rätlinig figur, och som har en gifven vinkel.

Dela den gifna rätliniga figuren, genom diagonaler, uti trianglar A, B, C. Upprita en parallelogram, DG, som är lika stor med triangeln A, och som har en vinkel, D, lika stor med den gifna vinkeln, F, a. Applicera sedan till GH en parallelogram, som är lika stor med B, och som har en vinkel GHK=F. Applicera vidare till KM en parallelogram, KN, som är lika stor med C, och som har vinkeln MKL=F, b: så skall det bevisas, att figuren EL är en parallelogram, som är lika stor med den gifna rätliniga figuren.

a. **34** prop. b. **2** axiom. c. **3** axiom.

Bevis. Triangeln ABC=ADC, a, och triangeln AEF=AGF, a, samt triangeln FHC=FKC, a. Derföre måste trianglarne AEF+FHC=AGF+FKC, b; och om man då tager bort dessa tvänne trianglar från hvardera af de lika stora trianglarne ABC och ADC; så återstår parallelogrammen FB=DF, c; h. s. b.

En parallelogram säges vara applicerad till en rät linea, då denna räta linea är en sida uti honom.

XLIV Proposition. Problem.

Att till en gifven rät linea , AB, applicera en parallelogram som är lika stor med en gifven triangel CFH, och som har en vinkel, lika stor med en gifven vinkel D.

Upprita en parallelogram GK=CFH, och som har en vinkel GBK=D, a. Ställ denna parallelogram så, att en af hans sidor, BK, kommer uti rät linea med AB. Drag ut NG, och drag A Q parallel med GB eller LN, b; sammanbind Q och B.

Emedan nu AQ och LN äro parallela, så måste vinklarne LNQ+NQA=tvänne räta, c , och således vinklarne LNQ+NQB<tvänne räta; hvadan QB och NL måste råkas, om de utdragas åt B och L, d.

Låt dem vara utdragna och råkas i L. Drag LP parallel med NQ, och drag ut GB och QA till M och Så skall det bevisas, att BP är den begärdta parallelogrammen.

a. **42** prop. b. **31** prop. c. **29** prop. d. **12** axiom. e. **43** prop. f. **1** axiom. g. **15** prop. Bevis. Parallelogrammen BP= GK, e, och GK är gjord = triangeln CFH; derföre måste äfven BP=CFH, f; h. s. b.

Vinkeln ABM=GBK, g; och GBK=D; derföre måste äfven ABM=D, f; h. s. b.

XLV Proposition. Problem.

Att upprita en parallelogram, som är lika stor med en gifven rätlinig figur, och som har en gifven vinkel.

Dela den gifna rätliniga figuren, genom diagonaler, uti trianglar A, B, C. Upprita en parallelogram, DG, som är lika stor med triangeln A, och som har en vinkel, D, lika stor med den gifna vinkeln, F, a. Applicera sedan till GH en parallelogram, som är lika stor med B, och som har en vinkel GHK=F. Applicera vidare till KM en parallelogram, KN, som är lika stor med C, och som har vinkeln MKL=F, b: så skall det bevisas, att figuren EL är en parallelogram, som är lika stor med den gifna rätliniga figuren.

a. **42** prop. b. **44** prop.

Bevis. Emedan vinkeln D=F, och vinkeln GHK=F, så måste D=GHK; och således D+GHD=GHK+GHD, **2** axiom, men D+GHD=2:ne räta .... **29** prop. derföre måste äfven GHK+GHD=2:ne räta .**1** axiom. Alltså äro DH och HK uti en rät linea **14** prop. På samma sätt bevises, att DK och KL äro uti en rät linea.

Vidare, emedan DH är parallel med EG, eftersom EH är en parallelogram; så måste äfven hela DL vara parallel med EG; och således alternatvinkeln .... EGH=GHL .... **29** prop. samt .... EGH+HGM=GHL+HGM **2** axiom. Men emedan GK är en parallelogram, måste GM vara parallel med HK, och således måste de båda inre vinklarna GHL+HGM=2:ne räta **29** prop hvadan äfven ... EGH+HGM=2:ne räta **1** axiom. och således äro EG och GM uti en rät linea **14** prop.

På samma sätt bevises, att EM och MN äro uti en rät linea.

Nu äro ED, GH, MK, NL parallela och lika stora; .... **34** prop. derföre måste äfven DL och EN vara parallela ....,,,,,,,,,,,,,,,,,,,,,,,,,, **33** prop. samt figuren EL en parallelogram; h. s. b. .... **22** defin.

Sluteligen är EH=A, GK=B, ML=C, derföre måste EH+GK+ML=EL=A+B+C, h. s. b. .... **2** axiom.

Skulle den gifna rätliniga figuren hafva flera än fem sidor, så erhölle man flera trianglar, med hvilka man då borde förfara, som med trianglarna B och C.

XLVI Proposition. Problem.

Att på en gifven rät linea, AB, upprita en qvadrat.

Drag AC vinkelrät mot AB, a, och gör AD=AB, b; drag DE parallel med AB, och BE parallel med AD, c; så blifver AE en qvadrat. Bevis. Figuren AE är, genom constructionen, en parallelogram, d; derföre måste AD=BE, och AB=DE, e; och alltså alla fyra sidorna AB, BE, ED, DA lika stora. f.

a. **11** prop. b. **3** prop. c. **31** prop. d. **22** defin. f. **1** axiom. g. **29** prop. h. **25** defin.

Vidare, emedan AD och BE äro parallela, och således vinklarne A+B=2:ne räta, g, samt A är en rät vinkel; så måste äfven B vara en rät vinkel. Derföre måste äfven D och E, som stå emot dem, vara räta vinklar, e. Enär alltså parallelogrammen AE är både liksidig och rätvinklig; så är han en qvadrat, h; h. s. b.

Corollar. **1.** *Häraf följer, att hvar och en qvadrat är parallelogram.*

Corollar. **2.** *Om en vinkel uti en parallelogram är rät, så äro de öfriga tre äfven räta.*

a. **42** prop. b. **44** prop.

Bevis. Emedan vinkeln D=F, och vinkeln GHK=F, så måste D=GHK; och således D+GHD=GHK+GHD, **2** axiom, men D+GHD=2:ne räta .... **29** prop. derföre måste äfven GHK+GHD=2:ne räta .**1** axiom. Alltså äro DH och HK uti en rät linea **14** prop. På samma sätt bevises, att DK och KL äro uti en rät linea.

Vidare, emedan DH är parallel med EG, eftersom EH är en parallelogram; så måste äfven hela DL vara parallel med EG; och således alternatvinkeln .... EGH=GHL .... **29** prop. samt ....

EGH+HGM=GHL+HGM **2** axiom. Men emedan GK är en parallelogram, måste GM vara parallel med HK, och således måste de båda inre vinklarna GHL+HGM=2:ne räta **29** prop hvadan äfven ... EGH+HGM=2:ne räta **1** axiom. och således äro EG och GM uti en rät linea **14** prop.

På samma sätt bevises, att EM och MN äro uti en rät linea.

Nu äro ED, GH, MK, NL parallela och lika stora; .... **34** prop. derföre måste äfven DL och EN vara parallela ....,,,,,,,,,,,,,,,,,,,,,,,,,, **33** prop. samt figuren EL en parallelogram; h. s. b. .... **22** defin.

Sluteligen är EH=A, GK=B, ML=C, derföre måste EH+GK+ML=EL=A+B+C, h. s. b. .... **2** axiom.

Skulle den gifna rätliniga figuren hafva flera än fem sidor, så erhölle man flera trianglar, med hvilka man då borde förfara, som med trianglarna B och C.

XLVI Proposition. Problem.

Att på en gifven rät linea, AB, uppritа en qvadrat.

Drag AC vinkelrät mot AB, a, och gör AD=AB, b; drag DE parallel med AB, och BE parallel med AD, c; så blifver AE en qvadrat. Bevis. Figuren AE är, genom constructionen, en parallelogram, d; derföre måste AD=BE, och AB=DE, e; och alltså alla fyra sidorna AB, BE, ED, DA lika stora. f.

a. **11** prop. b. **3** prop. c. **31** prop. d. **22** defin. f. **1** axiom. g. **29** prop. h. **25** defin.

Vidare, emedan AD och BE äro parallela, och således vinklarne A+B=2:ne räta, g, samt A är en rät vinkel; så måste äfven B vara en rät vinkel. Derföre måste äfven D och E, som stå emot dem, vara räta vinklar, e. Enär alltså parallelogrammen AE är både liksidig och rätvinklig; så är han en qvadrat, h; h. s. b.

Corollar. **1.** *Häraf följer, att hvar och en qvadrat är parallelogram.*

Corollar. **2.** *Om en vinkel uti en parallelogram är rät, så äro de öfriga tre äfven räta.*

XLVII Proposition. Theorem.

Uti rätvinkliga trianglar är qvadraten på den sidan, som står emot den räta vinkeln, lika stor med de båda qvadraterna tillsammantagna, som uppritas på de sidorna, som omfatta den räta vinkeln.

Låt ABC vara en triangel, och låt BAC vara en rät vinkel, samt låt qvadraterna BE, AM och AF vara uppritade, a, så skall det bevisas, att BE = AM + AF.

Drag räta lineerna BM, AE, AD och CF, samt AK parallel med BD. b.

Bevis. Vinkeln BAC är en rät vinkel, enligt hypothesen, och GAB är äfven en rät, c; derföre måste BAC + GAB = 2:ne räta; och således GA och AC uti en rät linea, d.

Vinkeln FBA = DBC; emedan båda äro räta, e; lägger man således ABC till på båda ställen; så blifver FBC= ABD. f.

a. **46** prop. b. **31** prop. c. **25** defin. d. **14** prop. e. **11** axiom. f. **2** axiom. g. **4** prop. h. **41** prop. i. **6** axiom.

Uti de båda trianglarna FBC och ABD, är således FB = BA, BC = BD, och mellanliggande vinkeln FBC = ABD; derföre måste triangeln FBC = ABD, g.

Men nu är qvadraten AF dubbelt så stor, som triangeln FBC, efter de stå på samma bas FB, och imellan samma parallela lineer FB och GC; och parallelogrammen BK är dubbelt så stor som triangeln ABD, h.; derföre måste AF = BK .... i. På samma sätt bevises, att qvadraten AM = parallelogr. LE; Alltså måste hela qvadraten BE = AM 4 AF, f, h. s. b.

Theorem.

De qvadrater, som hafva lika stora sidor, äro lika stora. Låt AB = CD; så skall det bevisas, att qvadraten AE = CF.

Bevis. *Emedan AB = CD, så måste alla sidorna, uti den ena qvadraten, vara lika stora med hvar sin sida uti den andra; och då dessutom alla vinklarne uti den ena, äro lika stora med hvar sin vinkel uti den andra, emedan de äro räta: så måste båda qvadraterna till alla delar träffa in på hvarandra, om den ena lägges på den andra, och således vara lika stora. h. s. b.*

Theorem.

De qvadrater, som äro lika stora, hafva lika stora sidor.

Om qvadraten CB = DH; så skall det bevisas, att AB = DE.

Bevis.

Då skulle, enligt nästföregående theorem qvadraten CB=DL; men det är antaget, att CB = DH; således skulle DL=DH; hvilket är omöjligt; alltså kan ej AB>DE.

På samma sätt bevises, att icke AB < DE. Derföre måste AB=DE, h. s. b.

XLVIII Proposition. Theorem.

Om qvadraten på en sida uti en triangel är lika stor med de qvadrater tillsammantagna, som uppritas på de öfriga båda sidorna; så skall vinkeln, som omfattas af dessa båda sidor, vara en rät vinkel.

Låt ABC vara en triangel, och låt qvadraten på BC vara lika stor med qvadraterna tillsammantagna på AB och AC; så skall det bevisas, att CAB är en rät vinkel.

Drag från A en rät linea AD=AB och vinkelrät emot AC, a; sammanbind C och D.

Bevis. Emedan AB=AD; så måste qvadraten på AD vara lika stor med qvadraten på AB; ty qvadrater, som hafva lika stora sidor, äro lika stora. Lägger man då qvadraten på AC till på båda ställen; så blifva qvadraterna tillsammantagna på AB och AC lika stora med qvadraterna tillsammantagna på AD och AC, b. Men dessa båda qvadrater, på och AD och AC, äro tillhopa lika stora med qvadraten pä CD, c, eftersom CAD är en rät vinkel; och qvadraten på BC är antagen vara lika stor med qvadraterna tillsammans på AB och AC; derföre måste qvadraten på CD=qvadraten på BC, d, samt sidan CD=BC,

a. **11** prop. och **3** prop. b. **2** axiom. c. **47** prop. d. **1** axiom. e. **8** prop.

Emedan således AB=AD, AC=AC, och basen BC=DC; så måste vinkeln CAB=CAD, e; men CAD är en rät vinkel, derföre måste äfven CAB vara en rät vinkel; h. s. b.

Problem.

tt göra en qvadrat lika stor med summan y eller med skillnaden imellan tvänne gifna qvadrater; (se näst föreg. figur.)

1:o Man construerar en rät vinkel DAC, gör AD lika stor med den ena qvadratens sida, och AG lika stor med den andra qvadratens sida; så blifver qvadraten på CD lika stor med summan af de båda gifna qvadraterna.

2:o Om man gör AD lika stor med den mindre qvadratens sida, och med den större qvadratens sida, såsom radie, och D till medelpunkt ritar en peripheri, samt genom A drager AC vinkelrät mot AD, och sammanbinder den punkten C, hvarest hon träffar peripherien, med D; så blifver qvadraten på AC lika stor med skillnaden imellan qvadraten på CD och qvadraten på AD.

*

XLVII Proposition. Theorem.

Uti rätvinkliga trianglar är qvadraten på den sidan, som står emot den räta vinkeln, lika stor med de båda qvadraterna tillsammantagna, som uppritas på de sidorna, som omfatta den räta vinkeln.

Låt ABC vara en triangel, och låt BAC vara en rät vinkel, samt låt qvadraterna BE, AM och AF vara uppritade, a, så skall det bevisas, att BE = AM + AF.

Drag räta lineerna BM, AE, AD och CF, samt AK parallel med BD. b.

Bevis. Vinkeln BAC är en rät vinkel, enligt hypothesen, och GAB är äfven en rät, c; derföre måste BAC + GAB = 2:ne räta; och således GA och AC uti en rät linea, d.

Vinkeln FBA = DBC; emedan båda äro räta, e; lägger man således ABC till på båda ställen; så blifver FBC= ABD. f.

a. **46** prop. b. **31** prop. c. **25** defin. d. **14** prop. e. **11** axiom. f. **2** axiom. g. **4** prop. h. **41** prop. i. **6** axiom.

Uti de båda trianglarna FBC och ABD, är således FB = BA, BC = BD, och mellanliggande vinkeln FBC = ABD; derföre måste triangeln FBC = ABD, g.

Men nu är qvadraten AF dubbelt så stor, som triangeln FBC, efter de stå på samma bas FB, och imellan samma parallela lineer FB och GC; och parallelogrammen BK är dubbelt så stor som triangeln ABD, h.; derföre måste AF = BK .... i. På samma sätt bevises, att qvadraten AM = parallelogr. LE; Alltså måste hela qvadraten BE = AM 4 AF, f, h. s. b.

Theorem.

De qvadrater, som hafva lika stora sidor, äro lika stora. Låt AB = CD; så skall det bevisas, att qvadraten AE = CF.

Bevis. *Emedan AB = CD, så måste alla sidorna, uti den ena qvadraten, vara lika stora med hvar sin sida uti den andra; och då dessutom alla vinklarne uti den ena, äro lika stora med hvar sin vinkel uti den andra, emedan de äro räta: så måste båda qvadraterna till alla delar träffa in på hvarandra, om den ena lägges på den andra, och således vara lika stora. h. s. b.*

Theorem.

De qvadrater, som äro lika stora, hafva lika stora sidor.

Om qvadraten CB = DH; så skall det bevisas, att AB = DE.

Bevis.

Då skulle, enligt nästföregående theorem qvadraten CB=DL; men det är antaget, att CB = DH; således skulle DL=DH; hvilket är omöjligt; alltså kan ej AB>DE.

På samma sätt bevises, att icke AB < DE. Derföre måste AB=DE, h. s. b.

XLVIII Proposition. Theorem.

Om qvadraten på en sida uti en triangel är lika stor med de qvadrater tillsammantagna, som uppritas på de öfriga båda sidorna; så skall vinkeln, som omfattas af dessa båda sidor, vara en rät vinkel.

Låt ABC vara en triangel, och låt qvadraten på BC vara lika stor med qvadraterna tillsammantagna på AB och AC; så skall det bevisas, att CAB är en rät vinkel.

Drag från A en rät linea AD=AB och vinkelrät emot AC, a; sammanbind C och D.

Bevis. Emedan AB=AD; så måste qvadraten på AD vara lika stor med qvadraten på AB; ty qvadrater, som hafva lika stora sidor, äro lika stora. Lägger man då qvadraten på AC till på båda ställen; så blifva qvadraterna tillsammantagna på AB och AC lika stora med qvadraterna tillsammantagna på AD och AC, b. Men dessa båda qvadrater, på och AD och AC, äro tillhopa lika stora med qvadraten pä CD, c, eftersom CAD är en rät vinkel;

och qvadraten på BC är antagen vara lika stor med qvadraterna tillsammans på AB och AC; derföre måste qvadraten på CD=qvadraten på BC, d, samt sidan CD=BC,

a. **11** prop. och **3** prop. b. **2** axiom. c. **47** prop. d. **1** axiom. e. **8** prop.

Emedan således AB=AD, AC=AC, och basen BC=DC; så måste vinkeln CAB=CAD, e; men CAD är en rät vinkel, derföre måste äfven CAB vara en rät vinkel; h. s. b.

Problem.

tt göra en qvadrat lika stor med summan y eller med skillnaden imellan tvänne gifna qvadrater; (se näst föreg. figur.)

1:o Man construerar en rät vinkel DAC, gör AD lika stor med den ena qvadratens sida, och AG lika stor med den andra qvadratens sida; så blifver qvadraten på CD lika stor med summan af de båda gifna qvadraterna.

2:o Om man gör AD lika stor med den mindre qvadratens sida, och med den större qvadratens sida, såsom radie, och D till medelpunkt ritar en peripheri, samt genom A drager AC vinkelrät mot AD, och sammanbinder den punkten C, hvarest hon träffar peripherien, med D; så blifver qvadraten på AC lika stor med skillnaden imellan qvadraten på CD och qvadraten på AD.

*

ANDRA BOKEN.

—

Definition.

En rectangel säges innehållas af tvänne räta lineer, då dessa lineer omfatta en rät vinkel uti honom.

Rectangeln AF säges innehållas af räta lineerna AD och DF.

Rectangeln DC säges innehållas af räta lineerna BD och BC.

För att beteckna en rectangel, skrifver man namnen på de båda lineerna, af hvilka han innehålles, bredvid hvarandra, med en punkt imellan dem.

Sålunda betyder AB.BC rectangeln, som innehålles af AB och BC, d. v. s. rectangeln AC; och BD.BC betyder rectangeln af BD och BC, d. v. s. rectangeln DC.

För att beteckna qvadraten på AB, skrifver __^{2} __^{2} man AB; så att AB betyder qvadraten AC.

Proposition I. Theorem.

Om tvänne räta lineer äro gifna, och den ena af dem är skuren i huru många delar det vara må, så skall rectangeln, som innehålles af dessa båda lineer, vara lika stor med de rectanglar tillsammantagna, som innehållas af den oskurna lineen och hvar och en af den skurna lineens delar.

Låt BC vara en rät linea, som är skuren uti huru många delar som helst, BD, DE, EC, och låt A vara en annan rät oskuren linea; så skall det bevisas, att

A.BC=A.BD+A.DE+A.EC.

Drag BF vinkelrät emot DC, a, gör BG=A, b, drag GH parallel med BC, samt DK, EL och CH parallela med BG, c.

Bevis. BH är då den rectangel, som innehålles af A och BC; ty han innehålles af BC och BG, af hvilka BG är gjord lika stor med A.

Vidare, emedan BG=DK=EL, d, och BG=A; så måste DK=EL=A, e.

a. 11 prop. 1. b. 3 prop. 1. c. 31 prop. 1. d. 34 prop. 1. e. 1 axiom.

Derföre kan man på samma sätt bevisa, att BK är den rectangel, som innehålles af A och af BD, att DL innehålles af A och af DE, samt att EH innehålles af A och af EC.

Men nu är hela rectangeln BH=BK+DL+EH; d. v. s. A.BC=A.BD+A.DE+A.EC, h. s. b.

ANDRA BOKEN.

—

Definition.

En rectangel säges innehållas af tvänne räta lineer, då dessa lineer omfatta en rät vinkel uti honom.

Rectangeln AF säges innehållas af räta lineerna AD och DF.

Rectangeln DC säges innehållas af räta lineerna BD och BC.

För att beteckna en rectangel, skrifver man namnen på de båda lineerna, af hvilka han innehålles, bredvid hvarandra, med en punkt imellan dem.

Sålunda betyder AB.BC rectangeln, som innehålles af AB och BC, d. v. s. rectangeln AC; och BD.BC betyder rectangeln af BD och BC, d. v. s. rectangeln DC.

För att beteckna qvadraten på AB, skrifver __^{2} __^{2} man AB; så att AB betyder qvadraten AC.

Proposition I. Theorem.

Om tvänne räta lineer äro gifna, och den ena af dem är skuren i huru många delar det vara må, så skall rectangeln, som innehålles af dessa båda lineer, vara lika stor med de rectanglar tillsammantagna, som innehållas af den oskurna lineen och hvar och en af den skurna lineens delar.

Låt BC vara en rät linea, som är skuren uti huru många delar som helst, BD, DE, EC, och låt A vara en annan rät oskuren linea; så skall det bevisas, att

A.BC=A.BD+A.DE+A.EC.

Drag BF vinkelrät emot DC, a, gör BG=A, b, drag GH parallel med BC, samt DK, EL och CH parallela med BG, c.

Bevis. BH är då den rectangel, som innehålles af A och BC; ty han innehålles af BC och BG, af hvilka BG är gjord lika stor med A.

Vidare, emedan BG=DK=EL, d, och BG=A; så måste DK=EL=A, e.

a. 11 prop. 1. b. 3 prop. 1. c. 31 prop. 1. d. 34 prop. 1. e. 1 axiom.

Derföre kan man på samma sätt bevisa, att BK är den rectangel, som innehålles af A och af BD, att DL innehålles af A och af DE, samt att EH innehålles af A och af EC.

Men nu är hela rectangeln BH=BK+DL+EH; d. v. s. A.BC=A.BD+A.DE+A.EC, h. s. b.

Proposition II. Theorem.

Om en rät linea AB är skuren i tvänne delar AC och CB, huru som heldst; så skola rectanglarne af hela lineen AB och hvar och en af hennes delar vara tillsammantagna lika stora med qvadraten på hela lineen.

Det skall bevisas, att __^{2} AB.AC4-AB.CB=AB.

Bevis. Om man uppritar på AB en qvadrat, a; och drager CE parallel med AD, b; så är AE den rectangel, som innehålles af A B och AC, ty han innehålles af AD och AC, af hvilka AD = AB, emedan de äro sidor i samma qvadrat. På samma sätt bevises, att CF innehålles af AB och CB.

a. 46 prop 1. b. 31 prop. 1.

Men nu är.

AE+CF=AF, __² d. v. s. AB.AC + AB.CB = AB h. s. b.

Proposition III. Theorem.

Om en rät linea AB är skuren huru som heldst i tvänne delar, AC och CB; såskall rectangeln af hela lineen, AB, och den ena delen, CB, vara lika stor med rectangeln af båda delarna, tillhopa med qvadraten på den först omtalta delen CB.

Det skall bevisas, att __² AB.CB = AC.CB + CB

Ty, om man uppritar en qvadrat på CB och fullbordar rectangeln AF; så är AF rectangeln af AB och CB; emedan CB = BF, och AE är rectangeln af AC och CB.

Men nu är AF = AE + CF, __² d. v. s. AB.CB = AC.CB+CB, h. s. b.

Proposition IV. Theorem.

Om en rät linea, AB, är skuren, huru som heldst, i tvänne delar, AC, CB; så är qvadraten på hela lineen lika stor med qvadraterna på båda delarna tillsammantagna med två gånger rectangeln af delarna.

Det skall bevisas, att __² __² __² AB = AC+CB+ 2 AC.CB.

Upprita på AB qvadraten BG, a, drag AK, och genom C, CH parallel med AG eller med BK, samt genom E, DF parallel med AB eller med GK, b.

Bevis. Räta lineen AK, som råkar de båda parallela lineerna CH och BK, gör vinkeln CEA=BKA, c. Men BKA=BAK, d, emedan

Proposition II. Theorem.

Om en rät linea AB är skuren i tvänne delar AC och CB, huru som heldst; så skola rectanglarne af hela lineen AB och hvar och en af hennes delar vara tillsammantagna lika stora med qvadraten på hela lineen.

Det skall bevisas, att __² AB.AC4-AB.CB=AB.

Bevis. Om man uppritar på AB en qvadrat, a; och drager CE parallel med AD, b; så är AE den rectangel, som innehålles af A B och AC, ty han innehålles af AD och AC, af hvilka AD = AB, emedan de äro sidor i samma qvadrat. På samma sätt bevises, att CF innehålles af AB och CB.

a. 46 prop 1. b. 31 prop. 1.

Men nu är.

AE+CF=AF, __² d. v. s. AB.AC + AB.CB = AB h. s. b.

Proposition III. Theorem.

Om en rät linea AB är skuren huru som heldst i tvänne delar, AC och CB; såskall rectangeln af hela lineen, AB, och den ena delen, CB, vara lika stor med rectangeln af båda delarna, tillhopa med qvadraten på den först omtalta delen CB.

Det skall bevisas, att __² AB.CB = AC.CB + CB

Ty, om man uppritar en qvadrat på CB och fullbordar rectangeln AF; så är AF rectangeln af AB och CB; emedan CB = BF, och AE är rectangeln af AC och CB.

Men nu är AF = AE + CF, __² d. v. s. AB.CB = AC.CB+CB, h. s. b.

Proposition IV. Theorem.

Om en rät linea, AB, är skuren, huru som heldst, i tvänne delar, AC, CB; så är qvadraten på hela lineen lika stor

med qvadraterna på båda delarna tillsammantagna med två gånger rectangeln af delarna.

Det skall bevisas, att __² __² __² AB = AC+CB+ 2 AC.CB.

Upprita på AB qvadraten BG, a, drag AK, och genom C, CH parallel med AG eller med BK, samt genom E, DF parallel med AB eller med GK, b.

Bevis. Räta lineen AK, som råkar de båda parallela lineerna CH och BK, gör vinkeln CEA=BKA, c. Men BKA=BAK, d, emedan

Proposition II. Theorem.

Om en rät linea AB är skuren i tvänne delar AC och CB, huru som heldst; så skola rectanglarne af hela lineen AB och hvar och en af hennes delar vara tillsammantagna lika stora med qvadraten på hela lineen.

Det skall bevisas, att __² AB.AC4-AB.CB=AB.

Bevis. Om man uppritar på AB en qvadrat, a; och drager CE parallel med AD, b; så är AE den rectangel, som innehålles af A B och AC, ty han innehålles af AD och AC, af hvilka AD = AB, emedan de äro sidor i samma qvadrat. På samma sätt bevises, att CF innehålles af AB och CB.

a. 46 prop 1. b. 31 prop. 1.

Men nu är.

AE+CF=AF, __² d. v. s. AB.AC + AB.CB = AB h. s. b.

Proposition III. Theorem.

Om en rät linea AB är skuren huru som heldst i tvänne delar, AC och CB; såskall rectangeln af hela lineen, AB, och den ena delen, CB, vara lika stor med rectangeln af båda delarna, tillhopa med qvadraten på den först omtalta delen CB.

Det skall bevisas, att __² AB.CB = AC.CB + CB

Ty, om man uppritar en qvadrat på CB och fullbordar rectangeln AF; så är AF rectangeln af AB och CB; emedan CB = BF, och AE är rectangeln af AC och CB.

Men nu är AF = AE + CF, __² d. v. s. AB.CB = AC.CB+CB, h. s. b.

Proposition IV. Theorem.

Om en rät linea, AB, är skuren, huru som heldst, i tvänne delar, AC, CB; så är qvadraten på hela lineen lika stor
med qvadraterna på båda delarna tillsammantagna med två gånger rectangeln af delarna.

Det skall bevisas, att __² __² __² AB = AC+CB+ 2 AC.CB.

Upprita på AB qvadraten BG, a, drag AK, och genom C, CH parallel med AG eller med BK, samt genom E, DF parallel med AB eller med GK, b.

Bevis. Räta lineen AK, som råkar de båda parallela lineerna CH och BK, gör vinkeln CEA=BKA, c. Men BKA=BAK, d, emedan

ABK är en likbent triangel; alltså är CEA = BAK, d. v. s. CEA = CAE, e.

Häraf följer åter, att CA = CE, f. Men CD är en parallelogram; således är CA=DE och CE = AD, g; hvarföre ock alla fyra sidorna AC, CE, ED, DA måste vara lika stora, och således parallelogrammen CD liksidig.

a. 46 prop. 1. b. 31 prop. 1. c. 29 prop. 1. d. 5 prop. 1. e. 1 axiom. f. 6 prop. 1. g. 34 prop. 1. h. Coroll. till 46 prop. 1. i. 43 Prop. l.

Vidare: emedan en vinkel, CAD, uti parallelogrammen CD, är rät, så måste parallelogrammen vara rätvinklig, h.

Emedan således CD är en liksidig och rätvinklig parallelogram, så måste han vara en qvadrat.

På samma sätt bevises, att FH är en qvadrat.

Således är $BG = AB^2$, $CD = AC^2$ och $FH = CB^2$, emedan EF = CB, g; och medan AC = CE , så är BE = AC.CB.

Nu är fyllnaden

BE = EG, i, och således BE + EG = 2.BE = 2.AC.CB; och, om man lägger qvadraterna $CD = AC^2$, och $FH = CB^2$, till på båda ställen, så blifver $BE + EG + CD + FH = AC^2\ CB^2 + 2.\ AC.CB$, d. v. s. $AB^2 = AC^2 + CB^2 + 2.AC.CB$, h. s. b.

Corollarium. *De parallelogrammer, som stå omkring diagonalen uti en qvadrat, äro äfven qvadrater.*

V Proposition. Theorem.

Om en rät linea AB är skuren ut i tvänne lika stora delar i C, och uti tvänne olika stora delar i D; så är rectangeln af de båda olika delarna, tillsammans med qvadraten på den lineen, som är imellan afskärningspunkterna, lika stor med qvadraten på halfva lineen.

Det skall bevisas, att $AD.DB + CD^2 = CB^2$.

Upprita på CB en qvadrat, drag BF, och DG parallel med BE, och genom H drag MK parallel med AB, samt AM parallel med BE.

Bevis. Emedan baserna ML = LK så måste rectanglarne AL = BL, a. Men fyllnaden DL= HE, b; så att, om DK lägges till på båda ställen, blifver BL = DE, och således AL=DE. Lägger man nu rectangeln CH och qvadraten LG, c, till på båda ställen; så blifver AH + LG = DE + CH + LG = CE. Men AH = AD.DB, $LG = CD^2$ och $CE = CB^2$; Alltså är $AD.DB + CD^2 = CB^2$, h. s. b.

a. 36 prop. l . b. 43 prop. 1. c. cor. till 4 prop. 2.

ABK är en likbent triangel; alltså är CEA = BAK, d. v. s. CEA = CAE, e.

Häraf följer åter, att CA = CE, f. Men CD är en parallelogram; således är CA=DE och CE = AD, g; hvarföre ock alla fyra sidorna AC, CE, ED, DA måste vara lika stora, och således parallelogrammen CD liksidig.

a. 46 prop. 1. b. 31 prop. 1. c. 29 prop. 1. d. 5 prop. 1. e. 1 axiom. f. 6 prop. 1. g. 34 prop. 1. h. Coroll. till 46 prop. 1. i. 43 Prop. l.

Vidare: emedan en vinkel, CAD, uti parallelogrammen CD, är rät, så måste parallelogrammen vara rätvinklig, h.

Emedan således CD är en liksidig och rätvinklig parallelogram, så måste han vara en qvadrat.

På samma sätt bevises, att FH är en qvadrat.

Således är $BG = AB^2$, $CD = AC^2$ och $FH = CB^2$, emedan EF = CB, g; och medan AC = CE , så är BE = AC.CB.

Nu är fyllnaden

BE = EG, i, och således BE + EG = 2.BE = 2.AC.CB; och, om man lägger qvadraterna $CD = AC^2$, och $FH = CB^2$, till på båda ställen, så blifver $BE + EG + CD + FH = AC^2\ CB^2 + 2.\ AC.CB$, d. v. s. $AB^2 = AC^2 + CB^2 + 2.AC.CB$, h. s. b.

Corollarium. *De parallelogrammer, som stå omkring diagonalen uti en qvadrat, äro äfven qvadrater.*

V Proposition. Theorem.

Om en rät linea AB är skuren ut i tvänne lika stora delar i C, och uti tvänne olika stora delar i D; så är rectangeln af de båda olika delarna, tillsammans med qvadraten på den lineen, som är imellan afskärningspunkterna, lika stor med qvadraten på halfva lineen.

Det skall bevisas, att $AD.DB + CD^2 = CB^2$.

Upprita på CB en qvadrat, drag BF, och DG parallel med BE, och genom H drag MK parallel med AB, samt AM parallel med BE.

Bevis. Emedan baserna ML = LK så måste rectanglarne AL = BL, a. Men fyllnaden DL= HE, b; så att, om DK lägges till på båda ställen, blifver BL = DE, och således AL=DE. Lägger man nu rectangeln CH och qvadraten LG, c, till på båda ställen; så blifver AH + LG = DE + CH + LG = CE. Men AH = AD.DB, LG = CD^2 och CE = CB^2; Alltså är $AD.DB + CD^2 = CB^2$, h. s. b.

a. 36 prop. 1 . b. 43 prop. 1. c. cor. till 4 prop. 2.

VI Proposition. Theorem.

Om en rät linea, AB, är skuren midtitu i C, och en annan rät linea, BD, är sammanfogad med henne ända rätt fram; så är rectangeln af hela den sammansatta lineen AD och den tillagda lineen BD, tillsammans med qvadraten på halfva lineen, lika stor med qvadraten på den halfva och den tillagda, såsom en linea, d. v. s. med qvadraten på CD.

Det skall bevisas, att

$AD.DB + CB^2 = CD^2$.

Upprita på CD en qvadrat och construera figuren, såsom i nästföregående proposition.

Bevis. Då är

AK = AD.DB, LG = CB^2 och CE = CD^2, Men AL = CH,a, och CH = HE,b, hvadan AL** HE; så satt om man lägger CK till på båda ställen, blifver

och om man vidare lägger LG till på båda ställen, blifver

AK + LG = HE + CK + LG; d. v. s. AK + LG = CE, eller . . $AB.DB + CB^2 = CD^2$, h. s. b.

a. 86 prop. 1. b. 43 prop. 1.

VII Proposition. Theorem.

Om en rät linea, AB, är skuren huru som heldst i tvänne delar, AC, CB; så är qvadraten på hela lineen, AB, tillsammans med qvadraten på en af delarna, AC, lika stor med två, gånger rectangeln af hela, lineen, AB, och denna del, AC, tillsammans med qvadraten på den andra delen CB.

Det skall bevisas, att

$AB^2 + AC^2 = 2.AB.AC + CB^2$

Upprita på AB en qvadrat, och construera figuren, såsom uti 4:e prop. 2:a boken.

Bevis. Då är BG = AB^2, CD = AC^2, FH = CB^2 och BD = AB.AC. Men emedan BE = EG, a; så måste BD = CG, och således BD + CG = 2.BD = 2.AB.AC. Nu är tydeligen BG + CD = BD + CG + FH; emedan qvadraten CD, som 2:ne gånger förekommer uti BG + CD, äfvenledes 2:ne gånger förekommer uti BD + CG; alltså äro

$AB^2 + AC^2 = 2.AB.AC + CB^2$, h. s. b.

a. 43 prop. 1.

VIII Proposition. Theorem.

Om en rät linea, AB, är skuren huru som heldst i tvänne delar, AC, CB; så är

VI Proposition. Theorem.

Om en rät linea, AB, är skuren midtitu i C, och en annan rät linea, BD, är sammanfogad med henne ända rätt fram; så är rectangeln af hela den sammansatta lineen AD och den tillagda lineen BD, tillsammans med qvadraten på halfva lineen, lika stor med qvadraten på den halfva och den tillagda, såsom en linea, d. v. s. med qvadraten på CD.

Det skall bevisas, att

$AD.DB + CB^2 = CD^2$.

Upprita på CD en qvadrat och construera figuren, såsom i nästföregående proposition.

Bevis. Då är

$AK = AD.DB$, $LG = CB^2$ och $CE = CD^2$, Men AL = CH,a, och CH = HE,b, hvadan AL** HE; så satt om man lägger CK till på båda ställen, blifver

och om man vidare lägger LG till på båda ställen, blifver

$AK + LG = HE + CK + LG$; d. v. s. $AK + LG = CE$, eller . . $AB.DB + CB^2 = CD^2$, h. s. b.

a. 86 prop. 1. b. 43 prop. 1.

VII Proposition. Theorem.

Om en rät linea, AB, är skuren huru som heldst i tvänne delar, AC, CB; så är qvadraten på hela lineen, AB, tillsammans med qvadraten på en af delarna, AC, lika stor med två, gånger rectangeln af hela, lineen, AB, och denna del, AC, tillsammans med qvadraten på den andra delen CB.

Det skall bevisas, att

$AB^2 + AC^2 = 2.AB.AC + CB^2$

Upprita på AB en qvadrat, och construera figuren, såsom uti 4:e prop. 2:a boken.

Bevis. Då är $BG = AB^2$, $CD = AC^2$, $FH = CB^2$ och $BD = AB.AC$. Men emedan BE = EG, a; så måste BD = CG, och således BD + CG = 2.BD = 2.AB.AC. Nu är tydeligen BG + CD = BD + CG + FH; emedan qvadraten CD, som 2:ne gånger förekommer uti BG + CD, äfvenledes 2:ne gånger förekommer uti BD + CG; alltså äro

$AB^2 + AC^2 = 2.AB.AC + CB^2$, h. s. b.

a. 43 prop. 1.

VIII Proposition. Theorem.

Om en rät linea, AB, är skuren huru som heldst i tvänne delar, AC, CB; så är

VI Proposition. Theorem.

Om en rät linea, AB, är skuren midtitu i C, och en annan rät linea, BD, är sammanfogad med henne ända rätt fram; så är rectangeln af hela den sammansatta lineen AD och den tillagda lineen BD, tillsammans med qvadraten på halfva lineen, lika stor med qvadraten på den halfva och den tillagda, såsom en linea, d. v. s. med qvadraten på CD.

Det skall bevisas, att

$AD.DB + CB^2 = CD^2$.

Upprita på CD en qvadrat och construera figuren, såsom i nästföregående proposition.

Bevis. Då är

$AK = AD.DB$, $LG = CB^2$ och $CE = CD^2$, Men AL = CH,a, och CH = HE,b, hvadan AL** HE; så satt om man lägger CK till på båda ställen, blifver

och om man vidare lägger LG till på båda ställen, blifver

AK + LG = HE + CK + LG; d. v. s. AK + LG = CE, eller . . $AB.DB + CB^2 = CD^2$, h. s. b.

a. 86 prop. 1. b. 43 prop. 1.

VII Proposition. Theorem.

Om en rät linea, AB, är skuren huru som heldst i tvänne delar, AC, CB; så är qvadraten på hela lineen, AB, tillsammans med qvadraten på en af delarna, AC, lika stor med två, gånger rectangeln af hela, lineen, AB, och denna del, AC, tillsammans med qvadraten på den andra delen CB.

Det skall bevisas, att

$AB^2 + AC^2 = 2.AB.AC + CB^2$

Upprita på AB en qvadrat, och construera figuren, såsom uti 4:e prop. 2:a boken.

Bevis. Då är $BG = AB^2$, $CD = AC^2$, $FH = CB^2$ och BD = AB.AC. Men emedan BE = EG, a; så måste BD = CG, och således BD + CG = 2.BD = 2.AB.AC. Nu är tydeligen BG + CD = BD + CG + FH; emedan qvadraten CD, som 2:ne gånger förekommer uti BG + CD, äfvenledes 2:ne gånger förekommer uti BD + CG; alltså äro

$AB^2 + AC^2 = 2.AB.AC + CB^2$, h. s. b.

a. 43 prop. 1.

VIII Proposition. Theorem.

Om en rät linea, AB, är skuren huru som heldst i tvänne delar, AC, CB; så är

fyra gånger rectangeln af hela lineen AB, och den ena delen BC, tillhopa med qvadraten pä den andra delen, AC, lika stor med qvadraten på hela lineen AB och den förut omtalta delen, BC, såsom en rät linea.

Om man utdrager AB, så att BD = BC; så skall det bevisas, att

$4.AB.BC + AC^2 = AD^2$.

Upprita på AD en qvadrat, drag DF, och BQ, CH parallela med DE, samt genom K och P, MN och LS parallela med AD.

Bevis. Då är $AE^2 = AD$, $LH^2 = AC$; och emedan CK = KS, a, samt KS=GR, b, så måste CK = GR. Men CK är äfven = BN, b; derföre måste GR = BN. Vidare är AK den rectangel, som innehålles af AB och BC; men AK = KE, a, och KE = GQ, b; och då nu äfven MP = PQ; så måste MR = GQ; och således alla fyra rectanglarna AK, KE, MR, GQ vara lika stora, eller tillsammantagna fyra gånger så stora som rectangeln af AB och BC. Men då, uti dessa fyra rectanglar, qvadraten GR förekommer 2:ne gånger, må man i stället taga honom blott en gång, tillhopa med den lika stora qvadraten BN; så att

AK + MR + PQ + KE + BN = 4.AB.BC.

Lägger man nu till på båda ställen $LH = AC^2$; så blifver

d. v. s. $AE = 4.AB.BC + AC^2$

eller..... $4.AB.BC + AC^2 = AD^2$, h. s. b.

a. 43 prop. 1. b. 36 prop. 1.

IX Proposition. Theorem.

Om en rät linea, AB, är skuren midtitu uti C, och uti tvänne olika delar, AD och DB; så äro qvadraterna på de båda olika delarna tillhopatagna, dubbelt så stora, som qvadraten på halfva lineen, tillhopa med qvadraten på den delen, CD, som är imellan båda afskärningspunkterna.

Det skall bevisas, att $AD^2 + DB^2$ är dubbelt så stor som $AC^2 + CD^2$.

Drag CE vinkelrät mot AB och lika stor med AC, a; drag AE, EB, och DF vinkelrät mot AB, GF parallel med AB, b, sammanbind A och F.

Bevis. Emedan ACE är en likbent triangel, och vinkeln ACE rät, så måste hvardera af AEC och CAE vara en half rät, c. För samma orsaks skull är hvardera af CEB och CBE en half rät vinkel, och således AEB en rät vinkel.

fyra gånger rectangeln af hela lineen AB, och den ena delen BC, tillhopa med qvadraten pä den andra delen, AC, lika stor med qvadraten på hela lineen AB och den förut omtalta delen, BC, såsom en rät linea.

Om man utdrager AB, så att BD = BC; så skall det bevisas, att

$4.AB.BC + AC^2 = AD^2$.

Upprita på AD en qvadrat, drag DF, och BQ, CH parallela med DE, samt genom K och P, MN och LS parallela med AD.

Bevis. Då är $AE^2 = AD$, $LH^2 = AC$; och emedan CK = KS, a, samt KS=GR, b, så måste CK = GR. Men CK är äfven = BN, b; derföre måste GR = BN. Vidare är AK den rectangel, som innehålles af AB och BC; men AK =

KE, a, och KE = GQ, b; och då nu äfven MP = PQ; så måste MR = GQ; och således alla fyra rectanglarna AK, KE, MR, GQ vara lika stora, eller tillsammantagna fyra gånger så stora som rectangeln af AB och BC. Men då, uti dessa fyra rectanglar, qvadraten GR förekommer 2:ne gånger, må man i stället taga honom blott en gång, tillhopa med den lika stora qvadraten BN; så att

AK + MR + PQ + KE + BN = 4.AB.BC.

Lägger man nu till på båda ställen LH = AC^2; så blifver

d. v. s. AE = 4.AB.BC + AC^2

eller..... 4.AB.BC + AC^2 = AD^2, h. s. b.

a. 43 prop. 1. b. 36 prop. 1.

IX Proposition. Theorem.

Om en rät linea, AB, är skuren midtitu uti C, och uti tvänne olika delar, AD och DB; så äro qvadraterna på de båda olika delarna tillhopatagna, dubbelt så stora, som qvadraten på halfva lineen, tillhopa med qvadraten på den delen, CD, som är imellan båda afskärningspunkterna.

Det skall bevisas, att AD^2 + DB^2 är dubbelt så stor som AC^2 + CD^2.

Drag CE vinkelrät mot AB och lika stor med AC, a; drag AE, EB, och DF vinkelrät mot AB, GF parallel med AB, b, sammanbind A och F.

Bevis. Emedan ACE är en likbent triangel, och vinkeln ACE rät, så måste hvardera af AEC och CAE vara en half rät, c. För samma orsaks skull är hvardera af CEB och CBE en half rät vinkel, och således AEB en rät vinkel.

Uti triangeln EGF är vinkeln GEF således en half rät, och vinkeln EGF en rät, emedan han är = ECD, d, hvadan EFG måste vara en half rät, e; således vinkeln GEF = GFE, samt sidan GE = GF, f. På samma sätt bevises att DF = DB.

Efter nu AC = CE; så är AC^2 = CE^2, g; och således AC^2 + CE^2 dubbelt så stor som AC^2; men AC^2 + CE^2 = AE^2, h; derföre är AE^2 dubbelt så stor som AC^2.

På samma sätt bevises, att EF^2 är dubbelt så stor som GF^2 eller som CD^2, i.

Alltså äro AE^2 + EF^2 dubbelt så stora, som AC^2 + CD^2. Men AE^2 + EF^2 = AF^2, h ; således är AF^2 dubbelt så stor som AC^2 + CD^2 ; och då AF^2 = AD^2 + DF^2, h;

så måste äfven AD^2 + DF^2 vara dubbelt så stora som AC^2 + CD^2. Sluteligen är DF = DB, och således äro AD^2 + DB^2 dubbelt så stora, som AC^2 + CD^2; h. s. b.

a. 11 o. 3 prop. 1. b. 31 prop. 1. c. 4 Cor. till 32 prop. 1. d. 29 prop. 1. e. 32 prop. 1. f. 6 prop. 1. g. 4 theor. näst efter 47 pr. 1. h. 47 prop. 1. i. 34 prop. 1.

X Proposition. Theorem.

Om en rät linea, AB, är skuren midtitu, uti C, och en annan rät linea, BD, sammanfogas med henne ända rätt fram; så är qvadraten på hela den sammansatta lineen, AD, tillsammantagen med qvadraten på den tillagda

lineen, BD, dubbelt så stor, som qvadraten på halfva lineen, tillsammantagen med qvadraten på den halfva och den tillagda såsom en rät linea.

Det skall bevisas, att $AD^2 + BD^2$ är dubbelt så stor som $AC^2 + CD^2$.

Drag EC vinkelrät mot, och lika stor med AC, a: drag AE, EB, och EF parallel med AD, och DF parallel med EC, b.

Bevis. Emedan då EC är parallel med DF; så måste vinklarne CEF + DFE = 2:ne räta, c; hvadan vinklarne BEF + DFE < 2:ne räta, och således måste EB och FD råkas, om de utdragas åt B och D, d. Låt dem råkas i G; och sammanbind A med G.

a. 11 o. 3 prop. 1. b. 31 prop. 1. c. 29 prop. 1. d. 12 axiom. 1. f. 15 prop. 1. g. 6 prop. 1. h. 47 prop. 1. i. 34 prop. 1.

Emedan ACE är en likbent triangel, som har vinkeln ACE rät; så måste CAE och CEA hvardera

Uti triangeln EGF är vinkeln GEF således en half rät, och vinkeln EGF en rät, emedan han är = ECD, d, hvadan EFG måste vara en half rät, e; således vinkeln GEF = GFE, samt sidan GE = GF, f. På samma sätt bevises att DF = DB.

Efter nu AC = CE; så är $AC^2 = CE^2$, g; och således $AC^2 + CE^2$ dubbelt så stor som AC^2; men $AC^2 + CE^2 = AE^2$, h; derföre är AE^2 dubbelt så stor som AC^2.

På samma sätt bevises, att EF^2 är dubbelt så stor som GF^2 eller som CD^2, i.

Alltså äro $AE^2 + EF^2$ dubbelt så stora, som $AC^2 + CD^2$. Men $AE^2 + EF^2 = AF^2$, h ; således är AF^2 dubbelt så stor som $AC^2 + CD^2$; och då $AF^2 = AD^2 + DF^2$, h;

så måste äfven $AD^2 + DF^2$ vara dubbelt så stora som $AC^2 + CD^2$. Sluteligen är DF = DB, och således äro $AD^2 + DB^2$ dubbelt så stora, som $AC^2 + CD^2$; h. s. b.

a. 11 o. 3 prop. 1. b. 31 prop. 1. c. 4 Cor. till 32 prop. 1. d. 29 prop. 1. e. 32 prop. 1. f. 6 prop. 1. g. 4 theor. näst efter 47 pr. 1. h. 47 prop. 1. i. 34 prop. 1.

X Proposition. Theorem.

Om en rät linea, AB, är skuren midtitu, uti C, och en annan rät linea, BD, sammanfogas med henne ända rätt fram; så är qvadraten på hela den sammansatta lineen, AD, tillsammantagen med qvadraten på den tillagda lineen, BD, dubbelt så stor, som qvadraten på halfva lineen, tillsammantagen med qvadraten på den halfva och den tillagda såsom en rät linea.

Det skall bevisas, att $AD^2 + BD^2$ är dubbelt så stor som $AC^2 + CD^2$.

Drag EC vinkelrät mot, och lika stor med AC, a: drag AE, EB, och EF parallel med AD, och DF parallel med EC, b.

Bevis. Emedan då EC är parallel med DF; så måste vinklarne CEF + DFE = 2:ne räta, c; hvadan vinklarne BEF + DFE < 2:ne räta, och således måste EB och FD råkas, om de utdragas åt B och D, d. Låt dem råkas i G; och sammanbind A med G.

a. 11 o. 3 prop. 1. b. 31 prop. 1. c. 29 prop. 1. d. 12 axiom. 1. f. 15 prop. 1. g. 6 prop. 1. h. 47 prop. 1. i. 34 prop. 1.

Emedan ACE är en likbent triangel, som har vinkeln ACE rät; så måste CAE och CEA hvardera

vara en half rät vinkel, e. För samma orsak äro CEB och CBE hvardera en half rät vinkel.

Vinkeln DBG är således äfven en half rät vinkel, f; och då BDG är en rät, emedan han är lika stor med sin alternat-vinkel ECD; så måste BGD vara en half rät vinkel, e; samt alltså BD = DG, g. På lika sätt bevises, att GEF är en half rät vinkel, och att EF = FG.

Nu är $AE^2 = AC^2 + CE^2$, h ; men $AC^2 = CE^2$, derföre är AE^2 dubbelt så stor, som AC^2. På samma sätt bevises, att EG^2 är dubbelt så stor, som EF^2, eller som CD^2, i.

Alltså måste $AE^2 + EG^2$ vara dubbelt så stor, som $AC^2 + CD^2$.

Men då hvardera af vinklarne AEC, CEG är en half rät; så är AEG en rät vinkel; och således.

$AG^2 = AE^2 + EG^2$, h.

hvaraf följer, att AG^2 är dubbelt så stor, som $AC^2 + CD^2$.

Vidare är

$AG^2 = AD^2 + DG^2 = AD^2 + BD^2$; alltså måste $AD^2 + BD^2$ vara dubbelt så stor, som $AC^2 + CD^2$; h. s. b.

XI Proposition. Problem.

Att skära en gifven rät linea, AB, så, att rectangeln af hela lineen och den ena delen, är lika stor med qvadraten på den andra delen.

Upprita på AB en qvadrat, a, skär sidan AC midtitu uti D, b; drag DB, drag ut DA, så att DF = DB, c, upprita på AF qvadraten FH; så skall det bevisas, att AB är skuren uti H så, att $AB.BH = AH^2$.

Bevis. Räta lineen CA är skuren midtitu uti D, och AF sammanfogad med henne ända rätt fram, derföre är

$CF.FA + AD^2 = DF^2$ ... d. d. v. s. $CG + AD^2 = DB^2$;

Men nu är .. $DB^2 = AD^2 + AB^2$; .... e; således måste $CG + AD^2 = AD^2 + AB^2$, och om man på båda ställen tager bort AD^2; så blifver $CG = AB^2 = AE$ .... f, samt, om man vidare borttager den gemensamma rectangeln CH, blifver AG = HE;

Men nu är $AG = AH^2$ och HE = AB.BH, emedan AB = BE. Derföre måste

$AB.BH = AH^2$, h. s. b.

a. 46 prop. 1. b. 10 prop. 1. c. 3 prop. 1. d. 6 prop. 2. e. 47 prop. 1. f. 3 axiom.

vara en half rät vinkel, e. För samma orsak äro CEB och CBE hvardera en half rät vinkel.

Vinkeln DBG är således äfven en half rät vinkel, f; och då BDG är en rät, emedan han är lika stor med sin alternat-vinkel ECD; så måste BGD vara en half rät vinkel, e; samt alltså BD = DG, g. På lika sätt bevises, att GEF är en half rät vinkel, och att EF = FG.

Nu är $AE^2 = AC^2 + CE^2$, h ; men $AC^2 = CE^2$, derföre är AE^2 dubbelt så stor, som AC^2. På samma sätt bevises, att EG^2 är dubbelt så stor, som EF^2, eller som CD^2, i.

Alltså måste $AE^2 + EG^2$ vara dubbelt så stor, som $AC^2 + CD^2$.

Men då hvardera af vinklarne AEC, CEG är en half rät; så är AEG en rät vinkel; och således.

$AG^2 = AE^2 + EG^2$, h.

hvaraf följer, att AG^2 är dubbelt så stor, som $AC^2 + CD^2$.

Vidare är

$AG^2 = AD^2 + DG^2 = AD^2 + BD^2$; alltså måste $AD^2 + BD^2$ vara dubbelt så stor, som $AC^2 + CD^2$; h. s. b.

XI Proposition. Problem.

Att skära en gifven rät linea, AB, så, att rectangeln af hela lineen och den ena delen, är lika stor med qvadraten på den andra delen.

Upprita på AB en qvadrat, a, skär sidan AC midtitu uti D, b; drag DB, drag ut DA, så att DF = DB, c, upprita på AF qvadraten FH; så skall det bevisas, att AB är skuren uti H så, att $AB.BH = AH^2$.

Bevis. Räta lineen CA är skuren midtitu uti D, och AF sammanfogad med henne ända rätt fram, derföre är

$CF.FA + AD^2 = DF^2$ ... d. d. v. s. $CG + AD^2 = DB^2$;

Men nu är .. $DB^2 = AD^2 + AB^2$; .... e; således måste $CG + AD^2 = AD^2 + AB^2$, och om man på båda ställen tager bort AD^2; så blifver $CG = AB^2 = AE$ .... f, samt, om man vidare borttager den gemensamma rectangeln CH, blifver AG = HE;

Men nu är $AG = AH^2$ och HE = AB.BH, emedan AB = BE. Derföre måste

$AB.BH = AH^2$, h. s. b.

a. 46 prop. 1. b. 10 prop. 1. c. 3 prop. 1. d. 6 prop. 2. e. 47 prop. 1. f. 3 axiom.

Proposition XII. Theorem.

Om man från någon af de spetsiga vinklarna, B, uti en trubbvinklig triangel, ABC, drager en rät linea, BD, vinkelrät mot den utdragna sidan AC; så är qvadraten på den sidan, BC, som står emot den trubbiga vinkeln, så mycket större än qvadraterna tillsammanstagna på AB och AC, som två gånger rectangeln af AC och AD.

Det skall bevisas, att: $BC^2 = AB^2 + AC^2 + 2.AC.AD$.

Bevis. Efter DC är en rät linea, som är skuren i A; så måste

$DC^2 = DA^2 + AC^2 + 2.AC.AD$ . . . 4 prop. 2.

Om man då lägger BD^2 till på båda ställen; så blir $BD^2 + DC^2 = BD^2 + DA^2 + AC^2 + 2.AC.AD$ . . 1 axiom. Men $BD^2 + DC^2 = BC^2$, och $BD^2 + DA^2 = AB^2$; alltså måste . . $BC^2 = AB^2 + AC^2 + 2.AC.AD$, h. s. b.

XIII Proposition, Theorem.

Om vinkeln A uti en triangel är spetsig, och man från en af triangelns öfriga båda vinklar, B, drager en linea, BD, vinkelrät emot AC; så är qvadraten på den sidan, BC, som står emot den spetsiga vinkeln, så mycket mindre än qvadraterna tillsammanstagna på AB och AC, som två gånger rectangeln af AC och AD.

Det skall bevisas, att $BC^2 + 2.AC.AD = AB^2 + AC^2$.

Bevis. Efter AC är en rät linea, som är skuren i tvänne delar genom punkten D; så måste

$AC^2 + AD^2 = 2.AC.AD + DC^2$ . . 7 prop. 2. eller $DC^2 + 2.AC.AD = AD^2 + AC^2$; så att om man på båda ställen adderar BD^2; blifver

$BD^2 + DC^2 + 2.AC.AD = BD^2 + AD^2 + AC^2$ Men $BD^2 + DC^2 = BC^2$, och $BD^2 + AD^2 = AB^2$; 47 pr. 1 Alltså måste $BC^2 + 2.AC.AD = AB^2 + AC^2$. h. s. b.

XIV Proposition. Problem.

Att göra en qvadrat, som är lika stor med en gifven rätlinig figur, A.

Upprita en rectangel, BD, som är lika stor med A, a. Är då BE = ED; så är BD den begärdta qvadraten; men om icke så är, så drag ut BE, så att EF = ED, b; upprita på BF en halfcirkel, drag ut DE tilldess, hon råkar peripherien uti H: det skall då bevisas, att

$EH^2 = A$.

Proposition XII. Theorem.

Om man från någon af de spetsiga vinklarna, B, uti en trubbvinklig triangel, ABC, drager en rät linea, BD, vinkelrät mot den utdragna sidan AC; så är qvadraten på den sidan, BC, som står emot den trubbiga vinkeln, så mycket större än qvadraterna tillsammanstagna på AB och AC, som två gånger rectangeln af AC och AD.

Det skall bevisas, att: $BC^2 = AB^2 + AC^2 + 2.AC.AD$.

Bevis. Efter DC är en rät linea, som är skuren i A; så måste

$DC^2 = DA^2 + AC^2 + 2.AC.AD$ . . . 4 prop. 2.

Om man då lägger BD^2 till på båda ställen; så blir $BD^2 + DC^2 = BD^2 + DA^2 + AC^2 + 2.AC.AD$ . . 1 axiom. Men $BD^2 + DC^2 = BC^2$, och $BD^2 + DA^2 = AB^2$; alltså måste . . $BC^2 = AB^2 + AC^2 + 2.AC.AD$, h. s. b.

XIII Proposition, Theorem.

Om vinkeln A uti en triangel är spetsig, och man från en af triangelns öfriga båda vinklar, B, drager en linea, BD, vinkelrät emot AC; så är qvadraten på den sidan, BC, som står emot den spetsiga vinkeln, så mycket mindre än qvadraterna tillsammanstagna på AB och AC, som två gånger rectangeln af AC och AD.

Det skall bevisas, att $BC^2 + 2.AC.AD = AB^2 + AC^2$.

Bevis. Efter AC är en rät linea, som är skuren i tvänne delar genom punkten D; så måste

$AC^2 + AD^2 = 2.AC.AD + DC^2$ . . 7 prop. 2. eller $DC^2 + 2.AC.AD = AD^2 + AC^2$; så att om man på båda ställen adderar BD^2; blifver

$BD^2 + DC^2 + 2.AC.AD = BD^2 + AD^2 + AC^2$ Men $BD^2 + DC^2 = BC^2$, och $BD^2 + AD^2 = AB^2$; 47 pr. 1 Alltså måste $BC^2 + 2.AC.AD = AB^2 + AC^2$. h. s. b.

XIV Proposition. Problem.

Att göra en qvadrat, som är lika stor med en gifven rätlinig figur, A.

Upprita en rectangel, BD, som är lika stor med A, a. Är då BE = ED; så är BD den begärdta qvadraten; men om icke så är, så drag ut BE, så att EF = ED, b; upprita på BF en halfcirkel, drag ut DE tilldess, hon råkar peripherien uti H: det skall då bevisas, att

$EH^2 = A$.

Proposition XII. Theorem.

Om man från någon af de spetsiga vinklarna, B, uti en trubbvinklig triangel, ABC, drager en rät linea, BD, vinkelrät mot den utdragna sidan AC; så är qvadraten på den sidan, BC, som står emot den trubbiga vinkeln, så mycket större än qvadraterna tillsammanstagna på AB och AC, som två gånger rectangeln af AC och AD.

Det skall bevisas, att: $BC^2 = AB^2 + AC^2 + 2.AC.AD$.

Bevis. Efter DC är en rät linea, som är skuren i A; så måste

$DC^2 = DA^2 + AC^2 + 2.AC.AD$ . . . 4 prop. 2.

Om man då lägger BD^2 till på båda ställen; så blir $BD^2 + DC^2 = BD^2 + DA^2 + AC^2 + 2.AC.AD$ . . 1 axiom. Men $BD^2 + DC^2 = BC^2$, och $BD^2 + DA^2 = AB^2$; alltså måste . . $BC^2 = AB^2 + AC^2 + 2.AC.AD$, h. s. b.

XIII Proposition, Theorem.

Om vinkeln A uti en triangel är spetsig, och man från en af triangelns öfriga båda vinklar, B, drager en linea, BD, vinkelrät emot AC; så är qvadraten på den sidan, BC, som står emot den spetsiga vinkeln, så mycket mindre än qvadraterna tillsammanstagna på AB och AC, som två gånger rectangeln af AC och AD.

Det skall bevisas, att $BC^2 + 2.AC.AD = AB^2 + AC^2$.

Bevis. Efter AC är en rät linea, som är skuren i tvänne delar genom punkten D; så måste

$AC^2 + AD^2 = 2.AC.AD + DC^2$ . . 7 prop. 2. eller $DC^2 + 2.AC.AD = AD^2 + AC^2$; så att om man på båda ställen adderar BD^2; blifver

$BD^2 + DC^2 + 2.AC.AD = BD^2 + AD^2 + AC^2$ Men $BD^2 + DC^2 = BC^2$, och $BD^2 + AD^2 = AB^2$; 47 pr. 1 Alltså måste $BC^2 + 2.AC.AD = AB^2 + AC^2$. h. s. b.

XIV Proposition. Problem.

Att göra en qvadrat, som är lika stor med en gifven rätlinig figur, A.

Upprita en rectangel, BD, som är lika stor med A, a. Är då BE = ED; så är BD den begärdta qvadraten; men om icke så är, så drag ut BE, så att EF = ED, b; upprita på BF en halfcirkel, drag ut DE tilldess, hon råkar

peripherien uti H: det skall då bevisas, att

$EH^2 = A$.

Bevis. Sammanbind H och medelpunkten G.

Då är räta lineen BF skuren midtitu i G , och i tvänne olika delar uti E; hvadan

$BE.EF + GE^2 = GF^2$ . . . . . c. Men BE.EF = BE.ED, emedan EF = ED, och $GF^2 = GH^2$, d, alltså måste $BE.ED + GE^2 = GH^2$.

Vidare är . . . $GH^2 = GE^2 + EH^2$, e; och BE.ED, eller BD, är gjord lika stor med den rätliniga figuren A; alltså måste

$A + GE^2 = GE^2 + EH^2$,

och, då GE^2 tages bort på båda ställen, blifver

$A = EH^2$, eller . . . . $EH^2 = A$, h. s. b.

a. 45 prop. 1. b. 3 prop. 1. c. 5 prop. 2. d. 15 defin. 1. e. 47 prop. 1.

*

Scolier till 1:a och 2:a Boken.

1:o De tvenne Postulaten handla endast om *räta lineen* och *cirkeln*. Hvarje Geometriskt problem construeras med tillhjelp af *Lineal* och *Passare*.

2:o Uti ett Geometriskt problem är fråga om att finna *punkter*, hvilka sedan användas, för att bestämma lineer och ytor. En punkt kan alltid bestämmas genom 2:ne lineers afskärning; ty då ingendera lineen har någon bredd, utgör hvarje afskärning blott *en* punkt. t. ex.

XI Prop. 1 Bok. Man ställer passarfoten uti D, och med en radie, som är större än halfva DB beskrifver man cirkelbågen q; derefter ställer man passarfoten i B, och med oförändrad radie beskrifver man bågen p. Dessa 2:ne bågars afskärning bestämmer punkten E, genom hvilken punkt den sökta vinkelräta lineen skall gå.

På detta sätt bör nybörjaren med egen hand verkställa alla förekommande problems construction.

3:o Definition. *Qvadrat-tum är en qvadrat, hvars sida är en tum lång* (se fig, 2).

Öm AB är en tum lång, så är ytan, som utgör qvadraten BD, en qvadrat-tum. Om AB vore en aln lång, så vore BD en qvadrat-aln o. s. v.

Likasom lineer mätas med lineer, med *tum, fot, aln, famn*, etc., hvilka derföre kallas *längdemått;* så mätas ytor med ytor, med *qvadrat-tum, qvadrat-fot, qvadrat-aln, qvadrat-famn*, etc., hvilka mått derföre kallas ytmått.

4:o Definition. *Area af en figur är denna figurs storlek, angifven uti yt-mått* (t. ex. se fig. 1.).

Om rectangeln AC är 12 qvadrat-tum, så är 12 qvadrat-tum denna rectangels area.

På samma sätt uttrycker man trianglars och andra månghörningars samt cirklars storlek.

Bevis. Sammanbind H och medelpunkten G.

Då är räta lineen BF skuren midtitu i G , och i tvänne olika delar uti E; hvadan

$BE.EF + GE^2 = GF^2$ . . . . . c. Men BE.EF = BE.ED, emedan EF = ED, och $GF^2 = GH^2$, d, alltså måste $BE.ED + GE^2 = GH^2$.

Vidare är . . . $GH^2 = GE^2 + EH^2$, e; och BE.ED, eller BD, är gjord lika stor med den rätliniga figuren A; alltså

måste

$A + GE^2 = GE^2 + EH^2$,

och, då GE^2 tages bort på båda ställen, blifver

$A = EH^2$, eller . . . . $EH^2 = A$, h. s. b.

a. 45 prop. 1. b. 3 prop. 1. c. 5 prop. 2. d. 15 defin. 1. e. 47 prop. 1.

*

Scolier till 1:a och 2:a Boken.

1:o De tvenne Postulaten handla endast om *räta lineen* och *cirkeln*. Hvarje Geometriskt problem construeras med tillhjelp af *Lineal* och *Passare*.

2:o Uti ett Geometriskt problem är fråga om att finna *punkter*, hvilka sedan användas, för att bestämma lineer och ytor. En punkt kan alltid bestämmas genom 2:ne lineers afskärning; ty då ingendera lineen har någon bredd, utgör hvarje afskärning blott *en* punkt. t. ex.

XI Prop. 1 Bok. Man ställer passarfoten uti D, och med en radie, som är större än halfva DB beskrifver man cirkelbågen q; derefter ställer man passarfoten i B, och med oförändrad radie beskrifver man bågen p. Dessa 2:ne bågars afskärning bestämmer punkten E, genom hvilken punkt den sökta vinkelräta lineen skall gå.

På detta sätt bör nybörjaren med egen hand verkställa alla förekommande problems construction.

3:o Definition. *Qvadrat-tum är en qvadrat, hvars sida är en tum lång* (se fig, 2).

Öm AB är en tum lång, så är ytan, som utgör qvadraten BD, en qvadrat-tum. Om AB vore en aln lång, så vore BD en qvadrat-aln o. s. v.

Likasom lineer mätas med lineer, med *tum, fot, aln, famn*, etc., hvilka derföre kallas *längdemått;* så mätas ytor med ytor, med *qvadrat-tum, qvadrat-fot, qvadrat-aln, qvadrat-famn*, etc., hvilka mått derföre kallas ytmått.

4:o Definition. *Area af en figur är denna figurs storlek, angifven uti yt-mått* (t. ex. se fig. 1.).

Om rectangeln AC är 12 qvadrat-tum, så är 12 qvadrat-tum denna rectangels area.

På samma sätt uttrycker man trianglars och andra månghörningars samt cirklars storlek.

 A E B

Fig. i.

D C

5:o Låt AC vara en rectangel, hvars sida AB är 4 tum lång, och hvars sida AD är 3 tum lång; låt AB vara indelad i sina 4 tura och AD vara indelad i små 3 tum, och låt genom alla delningspunkterna räta lineer vara dragna, parallela med rectangelns sidor: så uppkomma 4 qvadrat tum utefter AB for hvarje tum på AD, och alltså är rectangelns area 3.4 = 12 qvadrat tum.

6:0 Arean af en rectangel erhåller man således, om man tager producten af de lineer, af hvilka han innehålJes, båda uttryckta i samma sort längdemått.

Derföre beleckne vi rectangeln af AB och AD på samma sätt, som man uii räknekonsten betecknar producten af AB och AD, nämligen med AB.AD,

A B

Fig. 2,

D

7:o Skulle AC vara en qvadrat, hvars sida är 3 tum lång, så uppkomma genom förenämnda construction 9 qvadrat-tum uti AC.

Arean af en qvadrat erhålles, om man multiplicerar qvadratens sida med henne sjelf, uttryckt uti längdemått.

Derföre betecknar man qvadraten på AB på samma sätt, som man uti räknekonsten betecknar qvadraten, eller andra digniteten, af ett numertal, nämligen med AB.

8:0 For att till den algebraiska signaturen öfversatta några i det föregående anförda propositioner, låt uti

4t Proposition l,

hypothenusan BC = a, sidan AB = b och AC = c; «& innehåller denna proposition, att

Ä1 =s b* + c«;

så att, om man på ett snöre af mäter först 5 alnar, vidare 4 alnar, och slutligen 3 alnar, sajnt utspänner dessa delar af snöret till en triangel, så blifver den vinkeln, som omfattas af 3 och 4, en rät vinkel; emedan

5* = 42 + 32; det vill säga 25 = 16 -f- 9.

Äfvenledes kunna numertalen 13,12 och 5 användas på samma sätt som 5, 4 och 3; emedan

132 = 122 + 52. eller ..... 169 = 144 + 25.f

IV Proposition 2 Bok.

Om man antager , att AC = a , CB = b , så blifver AB = a + b; och denna proposition gifver då den bekanta formeln för qvadraten på en binom,

$(a + b)^2 = a^2 + b^2 + 2ab$. Uti figuren är AK = $(a + b)^2$, DC = a^2, HF = b^2 och

VI Proposition 2 Bok.

Om man antager CD = a, AC = CB = b ; så blifver AD = a + b, och BD = a - b, och propositionen innehåller, att

eller .... $(a + b). (a - b) = a^2 - b^2$.

VII Proposition 2 Bok,

Om man antager AB = a, AC = b; så blifver BC = a - b, och propositionen säger då, att

$a^2+ b^2 = 2ab + (a-b)^2$ eller .... $(a - b)^2 = a^2 + b^2 - 2ab$..

TREDJE BOKEN.

Definitioner.

1. Lika stora cirklar äro de diametrar, äro lika stora.

hvilkas radier, eller

2. En rät linea säges tangera en cirkel, om hon råkar honom så, att hon icke skär honom, då hon utdrages.

3. Cirklar sägas tangera hvarandra, om de råkas, utan att skära hvarandra.

4. En punkts afstånd från en gifven rät linea är den vinkelräta lineen, som drages från punkten till den gifna lineen.

En rät lineas afstånd från en punkt är detsamma som punktens afstånd från lineen.

Om EF är vinkelrät mot AB, och EG är vinkelrät mot CD; så är EF lineens AB afstånd från medelpunkten E, och

EG är lineens CD afstånd från samma punkt; så att, om EF = EG, så äro lineerna AB och CD lika långt från medelpunkten; men om EF vore större än EG; så så vore AB längre från punkten E, än CD.

6

f

IV Proposition 2 Bok.

Om man antager , att AC = a , CB = b , så blifver AB = a + b; och denna proposition gifver då den bekanta formeln för qvadraten på en binom,

$(a + b)^2 = a^2 + b^2 + 2ab$. Uti figuren är AK = $(a + b)^2$, DC = a^2, HF = b^2 och

VI Proposition 2 Bok.

Om man antager CD = a, AC = CB = b ; så blifver AD = a + b, och BD = a - b, och propositionen innehåller, att

eller .... $(a + b). (a - b) = a^2 - b^2$.

VII Proposition 2 Bok,

Om man antager AB = a, AC = b; så blifver BC = a - b, och propositionen säger då, att

$a^2 + b^2 = 2ab + (a-b)^2$ eller .... $(a - b)^2 = a^2 + b^2 - 2ab$..

TREDJE BOKEN.

Definitioner.

1. Lika stora cirklar äro de diametrar, äro lika stora.

hvilkas radier, eller

2. En rät linea säges tangera en cirkel, om hon råkar honom så, att hon icke skär honom, då hon utdrages.

3. Cirklar sägas tangera hvarandra, om de råkas, utan att skära hvarandra.

4. En punkts afstånd från en gifven rät linea är den vinkelräta lineen, som drages från punkten till den gifna lineen.

En rät lineas afstånd från en punkt är detsamma som punktens afstånd från lineen.

Om EF är vinkelrät mot AB, och EG är vinkelrät mot CD; så är EF lineens AB afstånd från medelpunkten E, och EG är lineens CD afstånd från samma punkt; så att, om EF = EG, så äro lineerna AB och CD lika långt från medelpunkten; men om EF vore större än EG; så så vore AB längre från punkten E, än CD.

6

5. Corda är en rät linea, som sammanbinder de yttersta ändarna af en båge.

6. Cirkelsegment kallas en plan figur, som inneslutes af en corda, som kallas segmentets bas> och af en båge.

7. Vinkeln, som omfattas af segmentets bas och af dess båge, kallas segmentets vinkel.

8. Om man tager en punkt på bågen af ett segment, och derifrån drager tvänne räta lineer till yttersta ändarna af segmentets bas; så säges den vinkeln, _ som dessa båda räta lineer

omfatta, stå uti det segmentet, och segmentet säges innehålla uti sig vinkeln.

Vinkeln, som omfattas af räta lineerna AB, BC, säges stå uti segmentet ABC; men segmentet ABC säges uti sig

innehålla vinkeln, som omfattas af räta lineerna AB och BC.

9. Vinkeln ABC säges stå på bågen ADC.

Bågen till det segment, uti hvilket en vinkel står, tillhopa med bågen, på hvilken vinkeln står, utgör alltid hela cirkelns peripheri.

10. Sector af en cirkel är en plan figur, som inneslutes af tvänne radier och af den båge, som är imellan dem.

11. Likformiga cirkelsegment äro de, som uti sig innehålla lika stora vinklar.

Om vinkeln ABC ~DEF; så är segmentet ABC likformigt med segmentet DEF.

I Proposition. Problem*

Att finna medelpunkten till en gifven cirkel AEBC.

Drag en corda AB, skär henne midtitu genom en mot henne vinkelrät linea EC, a; skär sedan EC midtitu uti F; så är F den sökta medelpunkten.

Bevis. Ty låt, om möjligt, en annan punkt G vara medelpunkt Drag GA, GD, GB. Emedan då AD =1 DB, enligt constructionen, och GA- GB, emedan de äro radier; samt GD är gemensam för båda trianglarna ADG, BDG; så måste vinkeln ADG == BDG, b; och således hvardera af dem en rät vinkel, c. Men nu är, enligt constructionen, FDA en rät vinkel; derföre skulle a. 10 o. 11 prop. 1. vinkeln FDA = GD A, hvilket b- 8 prop. 1.

är omöjligt. Således kan ej G c 10 defin' l vara medelpunkt.

På samma sätt bevises, att ingen annan punkt, utom F, är medelpunkt till cirkeln AEBC; alltså är F den sökta medelpunkten; h. s. b.

5. Corda är en rät linea, som sammanbinder de yttersta ändarna af en båge.

6. Cirkelsegment kallas en plan figur, som inneslutes af en corda, som kallas segmentets bas> och af en båge.

7. Vinkeln, som omfattas af segmentets bas och af dess båge, kallas segmentets vinkel.

8. Om man tager en punkt på bågen af ett segment, och derifrån drager tvänne räta lineer till yttersta ändarna af segmentets bas; så säges den vinkeln, _ som dessa båda räta lineer

omfatta, stå uti det segmentet, och segmentet säges innehålla uti sig vinkeln.

Vinkeln, som omfattas af räta lineerna AB, BC, säges stå uti segmentet ABC; men segmentet ABC säges uti sig innehålla vinkeln, som omfattas af räta lineerna AB och BC.

9. Vinkeln ABC säges stå på bågen ADC.

Bågen till det segment, uti hvilket en vinkel står, tillhopa med bågen, på hvilken vinkeln står, utgör alltid hela cirkelns peripheri.

10. Sector af en cirkel är en plan figur, som inneslutes af tvänne radier och af den båge, som är imellan dem.

Tredje Boken. 73

11. Likformiga cirkelsegment äro de, som uti sig innehålla lika stora vinklar.

Om vinkeln ABC ~DEF; så är segmentet ABC likformigt med segmentet DEF.

I Proposition. Problem*

Att finna medelpunkten till en gifven cirkel AEBC.

Drag en corda AB, skär henne midtitu genom en mot henne vinkelrät linea EC, a; skär sedan EC midtitu uti F; så är F den sökta medelpunkten.

Bevis. Ty låt, om möjligt, en annan punkt G vara medelpunkt Drag GA, GD, GB. Emedan då AD =1 DB, enligt constructionen, och GA- GB, emedan de äro radier; samt GD är gemensam för båda trianglarna ADG, BDG; så måste vinkeln ADG == BDG, b; och således hvardera af dem en rät vinkel, c. Men nu är, enligt constructionen, FDA en rät vinkel; derföre skulle a. 10 o. 11 prop. 1. vinkeln FDA = GD A, hvilket b- 8 prop. 1.

är omöjligt. Således kan ej G c 10 defin' l vara medelpunkt.

På samma sätt bevises, att ingen annan punkt, utom F, är medelpunkt till cirkeln AEBC; alltså är F den sökta medelpunkten; h. s. b.

6*

C or o 11. Om uti en cirkel en rät linea skär en corda midtitu > och är vinkelrät emot henne:, sä är medelpunkten på den skärande lineen.

II Proposition. Theorem»

man sammanbinder tvänne punkter, A och B, på en cirkels peripheri, så faller räta lineen AB inom cirkeln.

Sök cirkelns medelpunkt D, drag AD och BD, samt ED från hvilken l punkt E som heldst på AB.

Bevis. ADB är då en likbent triangel, och således vinkeln DAB = DBA, a; men

a. 5 prop. 1. vinkeln DEB > DAB, b; derföre

b. 16 prop. 1. är äfven vinkeln DEB >DEE; och

c. 19 prop. 1. såiedes sidan DB > DE, c. Men DB räcker endast till peripherien, alltså måste punkten E vara inuti cirkeln. På samma sätt bevises om hvarje annan punkt på räta lineen AB att han är inuti cirkeln; alltså faller AB hel och hållen inom cirkeln.

Corollarium. En rät linea, som råkar en cirkel, men icke skär honom, defin* Z, kan således råka honom endast uti en punkt; d. v. s. tangenten råkar den cirkel, som han tangerar, blott uti en punkt.

t

 III Proposition* Theorem.

Om en rät linea, CD, som går genom me-delpunjjiten uti en cirkel, skär en annan rät lineal AB, som icke går genom medelpunkten, midtitu; så är hon vinkelrät emot AB; och om hon är vinkelrät emot henne; så skär hon henne midtitu.

-*-_ .

HDrag frän medelpunkten É räta lineerna EA, EB

l:o Det skall bevisas, att, öm - BF; så är CD vinkelrät mot

AB.

Bevis. Sidan AF = BF, EF är gemensam för båda trianglarna AFE, BFE, a. 8 prop. 1. och EA = EB; derföre måste vin- b- 10 defin- 1. keln EFA = EFB, a; och således EF elleTtD vinkelrät mot AB, b, h. s. b.

2:o Det skall nbevisas, att, om vinkeln EF A = EFB, så är AF-BF.

Bevis. AEB är en likbent triangel, således är vinkeln E AF ~EBF, a. Nu är a. 5 prop. 1. äfven, enligt hypothésen, vinkeln ^. 26 prop. l, EFA - EFB, och sidan EF är gemensam till båda trianglarna EFA och EFB; derföre måste sidan AF = BF, b, h. s. b.

IV Proposition. Theorem.

Om tvänne räta lineer, AC och BD, uti en cirkel, skär a hvarandra, och ej gå genom 74

Tredje Boken.

C or o 11. Om uti en cirkel en rät linea skär en corda midtitu > och är vinkelrät emot henne:, sä är medelpunkten på den skärande lineen.

II Proposition. Theorem»

man sammanbinder tvänne punkter, A och B, på en cirkels peripheri, så faller räta lineen AB inom cirkeln.

Sök cirkelns medelpunkt D, drag AD och BD, samt ED från hvilken l punkt E som heldst på AB.

Bevis. ADB är då en likbent triangel, och således vinkeln DAB = DBA, a; men

a. 5 prop. 1. vinkeln DEB > DAB, b; derföre

b. 16 prop. 1. är äfven vinkeln DEB >DEE; och

c. 19 prop. 1. såiedes sidan DB > DE, c. Men DB räcker endast till peripherien, alltså måste punkten E vara inuti cirkeln. På samma sätt bevises om hvarje annan punkt på räta lineen AB att han är inuti cirkeln; alltså faller AB hel och hållen inom cirkeln.

Corollarium. En rät linea, som råkar en cirkel, men icke skär honom, defin* Z, kan således råka honom endast uti en punkt; d. v. s. tangenten råkar den cirkel, som han tangerar, blott uti en punkt.

t

Tredje Boken. III Proposition* Theorem.

75

Om en rät linea, CD, som går genom me-delpunjjiten uti en cirkel, skär en annan rät lineal AB, som icke går genom medelpunkten, midtitu; så är hon vinkelrät emot AB; och om hon är vinkelrät emot henne; så skär hon henne midtitu.

-*-_ .

HDrag frän medelpunkten É räta lineerna EA, EB

l:o Det skall bevisas, att, öm - BF; så är CD vinkelrät mot

AB.

Bevis. Sidan AF = BF, EF är gemensam för båda trianglarna AFE, BFE, a. 8 prop. 1. och EA = EB; derföre måste vin- b- 10 defin- 1. keln EFA = EFB, a; och således EF elleTtD vinkelrät mot AB, b, h. s. b.

2:o Det skall nbevisas, att, om vinkeln EF A = EFB, så är AF-BF.

Bevis. AEB är en likbent triangel, således är vinkeln E AF ~EBF, a. Nu är a. 5 prop. 1. äfven, enligt hypothésen, vinkeln ^. 26 prop. l, EFA - EFB, och sidan EF är gemensam till båda trianglarna EFA och EFB; derföre måste sidan AF = BF, b, h. s. b.

IV Proposition. Theorem.

Om tvänne räta lineer, AC och BD, uti en cirkel, skär a hvarandra, och ej gå genom 74

Tredje Boken.

C or o 11. Om uti en cirkel en rät linea skär en corda midtitu > och är vinkelrät emot henne:, sä är medelpunkten på den skärande lineen.

II Proposition. Theorem»

man sammanbinder tvänne punkter, A och B, på en cirkels peripheri, så faller räta lineen AB inom cirkeln.

Sök cirkelns medelpunkt D, drag AD och BD, samt ED från hvilken l punkt E som heldst på AB.

Bevis. ADB är då en likbent triangel, och således vinkeln DAB = DBA, a; men

a. 5 prop. 1. vinkeln DEB > DAB, b; derföre

b. 16 prop. 1. är äfven vinkeln DEB >DEE; och

c. 19 prop. 1. såiedes sidan DB > DE, c. Men DB räcker endast till peripherien, alltså måste punkten E vara inuti cirkeln. På samma sätt bevises om hvarje annan punkt på räta lineen AB att han är inuti cirkeln; alltså faller AB hel och hållen inom cirkeln.

Corollarium. En rät linea, som råkar en cirkel, men icke skär honom, defin* Z, kan således råka honom endast uti en punkt; d. v. s. tangenten råkar den cirkel, som han tangerar, blott uti en punkt.

t

Tredje Boken. III Proposition* Theorem.

75

Om en rät linea, CD, som går genom me-delpunjjiten uti en cirkel, skär en annan rät lineal AB, som icke går genom medelpunkten, midtitu; så är hon vinkelrät emot AB; och om hon är vinkelrät emot henne; så skär hon henne midtitu.

-*-_ .

HDrag frän medelpunkten É räta lineerna EA, EB

l:o Det skall bevisas, att, öm - BF; så är CD vinkelrät mot

AB.

Bevis. Sidan AF = BF, EF är gemensam för båda trianglarna AFE, BFE, a. 8 prop. 1. och EA = EB; derföre måste vin- b- 10 defin- 1. keln EFA = EFB, a; och således EF elleTtD vinkelrät mot AB, b, h. s. b.

2:o Det skall nbevisas, att, om vinkeln EF A = EFB, så är AF-BF.

Bevis. AEB är en likbent triangel, således är vinkeln E AF ~EBF, a. Nu är a. 5 prop. 1. äfven, enligt hypothésen, vinkeln ^. 26 prop. l, EFA - EFB, och sidan EF är gemensam till båda trianglarna EFA och EFB; derföre måste sidan AF = BF, b, h. s. b.

IV Proposition. Theorem.

Om tvänne räta lineer, AC och BD, uti en cirkel, skär a hvarandra, och ej gå genom 74

Tredje Boken.

C or o 11. Om uti en cirkel en rät linea skär en corda midtitu > och är vinkelrät emot henne:, sä är medelpunkten på den skärande lineen.

II Proposition. Theorem»

man sammanbinder tvänne punkter, A och B, på en cirkels peripheri, så faller räta lineen AB inom cirkeln.

Sök cirkelns medelpunkt D, drag AD och BD, samt ED från hvilken l punkt E som heldst på AB.

Bevis. ADB är då en likbent triangel, och således vinkeln DAB = DBA, a; men

a. 5 prop. 1. vinkeln DEB > DAB, b; derföre

b. 16 prop. 1. är äfven vinkeln DEB >DEE; och

c. 19 prop. 1. såiedes sidan DB > DE, c. Men DB räcker endast till peripherien, alltså måste punkten E vara inuti cirkeln. På samma sätt bevises om hvarje annan punkt på räta lineen AB att han är inuti cirkeln; alltså faller AB hel och hållen inom cirkeln.

Corollarium. En rät linea, som råkar en cirkel, men icke skär honom, defin* Z, kan således råka honom endast uti en punkt; d. v. s. tangenten råkar den cirkel, som han tangerar, blott uti en punkt.

t

Om en rät linea, CD, som går genom me-delpunjjiten uti en cirkel, skär en annan rät lineal AB, som icke går genom medelpunkten, midtitu; så är hon vinkelrät emot AB; och om hon är vinkelrät emot henne; så skär hon henne midtitu.

-*-_ .

HDrag frän medelpunkten É räta lineerna EA, EB

l:o Det skall bevisas, att, öm - BF; så är CD vinkelrät mot

AB.

Bevis. Sidan AF = BF, EF är gemensam för båda trianglarna AFE, BFE, a. 8 prop. 1. och EA = EB; derföre måste vin- b- 10 defin- 1. keln EFA = EFB, a; och således EF elleTtD vinkelrät mot AB, b, h. s. b.

2:o Det skall nbevisas, att, om vinkeln EF A = EFB, så är AF-BF.

Bevis. AEB är en likbent triangel, således är vinkeln E AF ~EBF, a. Nu är a. 5 prop. 1. äfven, enligt hypothésen, vinkeln ^. 26 prop. l, EFA - EFB, och sidan EF är gemensam till båda trianglarna EFA och EFB; derföre måste sidan AF = BF, b, h. s. b.

IV Proposition. Theorem.

Om tvänne räta lineer, AC och BD, uti en cirkel, skär a hvarandra, och ej gå genom

medelpunkten; så skära de hvarandra icke midtitu. r^

Sammanbind medelpunkten F

med E. <-Q

Bevis. Om då AC och BD

skure hvarandra midtitu; så skulle äfven FE skära dessa båda lineer midtitu; och således, enligt nästföregående proposition, vara vinkelrät emot båda; så att vinkeln FED = FEC, hvilket är omöjligt. Alltså kunna icke AC och BD skära hvarandra midtitu, h. s. b.

W Proposition. Theorem.

Tvänne cirklar, ABE och EDB, som skära hvarandra, kunna ej hafva samma medelpunkt.

.

Ty om C vorex deras gemensamma medelpunkt, så skulle lineerna CA och CD vara sinsimellan lika stora, emedan de voro lika stora med en och samma CB; hvilket är omöjligt.

II Proposition. Theorem.

Om tvänne cirklar tangera hvarandra innantill, så kunna de ej hafva samma medelpunkt.

Tredje Boken.

77

Ty om cirklarne ABE och DBC tangera hvarandra uti B, och hade samma medelpunkt F; så skulle BF = FD = hvilket är omöjligt.

VII Proposition. Theorem.

l;o Om man från en punkt inuti en cirkel drager räta lineer till peripherien., så är bland dessa lineer den störst, som går genom medelpunkten, och den öfriga delen af diametern är den minsta.

Bland de öfriga är den större, som är närmare infill den, som går genom medelpunkten, än den, som är längre frän henne.

Z:o Då en linea, på den ena sidan om den största, är gifven, kan man, från den gifna punkten ej draga mer än en linea, som är lika stor med henne » på den andra sidan om den största* *

Det ska\l bevisas, om E är medelpunkten, l:o att FA > FB > FC >FG > FD.

Bevis* Drag från medelpunkten E radierna EB, EC, EG.

Emedan EF och EB tillsammans måste vara större än FB, a; så måste äfven EF och E A tillsammans vara större än FB; d. v. s. att FA >FB; h. s. b. 76 Tredje Boken.

medelpunkten; så skära de hvarandra icke midtitu. r^

Sammanbind medelpunkten F

med E. <-Q

Bevis. Om då AC och BD

skure hvarandra midtitu; så skulle äfven FE skära dessa båda lineer midtitu; och således, enligt nästföregående proposition, vara vinkelrät emot båda; så att vinkeln FED = FEC, hvilket är omöjligt. Alltså kunna icke AC och BD skära hvarandra midtitu, h. s. b.

W Proposition. Theorem.

Tvänne cirklar, ABE och EDB, som skära hvarandra, kunna ej hafva samma medelpunkt.

.

Ty om C vorex deras gemensamma medelpunkt, så skulle lineerna CA och CD vara sinsimellan lika stora, emedan de voro lika stora med en och samma CB; hvilket är omöjligt.

II Proposition. Theorem.

Om tvänne cirklar tangera hvarandra innantill, så kunna de ej hafva samma medelpunkt.

Tredje Boken.

77

Ty om cirklarne ABE och DBC tangera hvarandra uti B, och hade samma medelpunkt F; så skulle BF = FD = hvilket är omöjligt.

VII Proposition. Theorem.

l;o Om man från en punkt inuti en cirkel drager räta lineer till peripherien., så är bland dessa lineer den störst, som går genom medelpunkten, och den öfriga delen af diametern är den minsta.

Bland de öfriga är den större, som är närmare infill den, som går genom medelpunkten, än den, som är längre frän

henne.

Z:o Då en linea, på den ena sidan om den största, är gifven, kan man, från den gifna punkten ej draga mer än en linea, som är lika stor med henne » på den andra sidan om den största* *

Det ska\l bevisas, om E är medelpunkten, l:o att FA > FB > FC >FG > FD.

Bevis* Drag från medelpunkten E radierna EB, EC, EG.

Emedan EF och EB tillsammans måste vara större än FB, a; så måste äfven EF och E A tillsammans vara större än FB; d. v. s. att FA >FB; h. s. b. 76 Tredje Boken.

medelpunkten; så skära de hvarandra icke midtitu. r^

Sammanbind medelpunkten F

med E. <-Q

Bevis. Om då AC och BD

skure hvarandra midtitu; så skulle äfven FE skära dessa båda lineer midtitu; och således, enligt nästföregående proposition, vara vinkelrät emot båda; så att vinkeln FED = FEC, hvilket är omöjligt. Alltså kunna icke AC och BD skära hvarandra midtitu, h. s. b.

W Proposition. Theorem.

Tvänne cirklar, ABE och EDB, som skära hvarandra, kunna ej hafva samma medelpunkt.

.

Ty om C vorex deras gemensamma medelpunkt, så skulle lineerna CA och CD vara sinsimellan lika stora, emedan de voro lika stora med en och samma CB; hvilket är omöjligt.

II Proposition. Theorem.

Om tvänne cirklar tangera hvarandra innantill, så kunna de ej hafva samma medelpunkt.

Tredje Boken.

77

Ty om cirklarne ABE och DBC tangera hvarandra uti B, och hade samma medelpunkt F; så skulle BF = FD = hvilket är omöjligt.

VII Proposition. Theorem.

l;o Om man från en punkt inuti en cirkel drager räta lineer till peripherien., så är bland dessa lineer den störst, som går genom medelpunkten, och den öfriga delen af diametern är den minsta.

Bland de öfriga är den större, som är närmare infill den, som går genom medelpunkten, än den, som är längre frän henne.

Z:o Då en linea, på den ena sidan om den största, är gifven, kan man, från den gifna punkten ej draga mer än en linea, som är lika stor med henne » på den andra sidan om den största* *

Det ska\l bevisas, om E är medelpunkten, l:o att FA > FB > FC >FG > FD.

Bevis* Drag från medelpunkten E radierna EB, EC, EG.

Emedan EF och EB tillsammans måste vara större än FB, a; så måste äfven EF och E A tillsammans vara större än FB; d. v. s. att FA >FB; h. s. b. 76 Tredje Boken.

medelpunkten; så skära de hvarandra icke midtitu. r^

Sammanbind medelpunkten F

med E. <-Q

Bevis. Om då AC och BD

skure hvarandra midtitu; så skulle äfven FE skära dessa båda lineer midtitu; och således, enligt nästföregående proposition, vara vinkelrät emot båda; så att vinkeln FED = FEC, hvilket är omöjligt. Alltså kunna icke AC och BD skära hvarandra midtitu, h. s. b.

W Proposition. Theorem.

Tvänne cirklar, ABE och EDB, som skära hvarandra, kunna ej hafva samma medelpunkt.

.

Ty om C vorex deras gemensamma medelpunkt, så skulle lineerna CA och CD vara sinsimellan lika stora, emedan de voro lika stora med en och samma CB; hvilket är omöjligt.

II Proposition. Theorem.

Om tvänne cirklar tangera hvarandra innantill, så kunna de ej hafva samma medelpunkt.

Ty om cirklarne ABE och DBC tangera hvarandra uti B, och hade samma medelpunkt F; så skulle BF = FD = hvilket är omöjligt.

VII Proposition. Theorem.

l;o Om man från en punkt inuti en cirkel drager räta lineer till peripherien., så är bland dessa lineer den störst, som går genom medelpunkten, och den öfriga delen af diametern är den minsta.

Bland de öfriga är den större, som är närmare infill den, som går genom medelpunkten, än den, som är längre frän henne.

Z:o Då en linea, på den ena sidan om den största, är gifven, kan man, från den gifna punkten ej draga mer än en linea, som är lika stor med henne » på den andra sidan om den största* *

Det ska\l bevisas, om E är medelpunkten, l:o att FA > FB > FC >FG > FD.

Bevis* Drag från medelpunkten E radierna EB, EC, EG.

Emedan EF och EB tillsammans måste vara större än FB, a; så måste äfven EF och E A tillsammans vara större än FB; d. v. s. att FA >FB; h. s. b.T8 Tredje Boken.

Vidare, BE = CE och EF

a. 20 prop. 1. är gemensam

b. 24 prop. 1. f5r båda tri_

c. 5 axiom. angjarna BEP

K och CEP, men vinkeln BEF >CEF; således måste FB > FC, b, h. s. b. På samma sätt bevises, att FC>FG.

Slutligen, emedan EF + FG >EG, a; så måste äfven EF + FG > ED, och således FG > FD, c, h, s. b.

2:o Om man ritar vinkeln FEH^FEG, a, och drager FH; så skall det bevisas, att FG=FH.

Bevis. Emedan EG = EH, efter de äro radier i samma cirkel, och EF är gemensam till båda trianglarna GEF och HEF,, samt mellanliggande vinklarne vid E äro gjorda lika stora, så måste basen FG - FH, b; h. s. b.

a. 23 prop. 1. Om man nu på högra sidan

b. 4 prop. 1. om AD? utom FH? äfven kunde draga FK rz FG; så skulle den lineen FH, som ar längre från den

största, vara lika stor med den, FK, som är närmare intill henne, hvilket strider emot hvad förut är beyist i denna proposition. Alltså kunna blott 2 och 2 lika stora räta lineer dragas från den gifna punkten till peripherien, en på hvardera sidan om den största el ler minsta, h, s. b.

VIII Proposition, Theorem.

Om man från en punkt utom en cirkel drager räta lineer till cirkelns peripheri; af hvilka en går genom medelpunkten; så är, bland dem, som falla pä den frånböjda (con-cava) delen af cirkelns peripheri, den störst, som går genom medelpunkten; och bland de öfriga är den större, som är närmare intill den, som går genom medelpunkten, än den> som är längre från henne.

Men bland dem, som falla på den åtboj-da (convexa) delen af peripherien, är den minst, som är imellan punkten och diame~ tern; och bland de öfriga är den mindre, som är närmare intill den minsta, än den, som är längre från henne.

Från den gifna punkten kunna blott 2 och 2 räta lineer, som äro lika stora, dragas till peripherien, en på hvardera sidan om den minsta.

Låt M vara medelpunkten till cirkeln ACB; så skall det bevisas;

l:oattDA>DE>DF>DC.

2:o attDO <DL < DI < DH.

3:o att DB kan vara lika stor med DI; men att ingen annan linea, på högra sidan om DL, kan från D dragas till peripherien, lika stor med DI.

Bevis. Drag radierna ML, Ml, MH, MC, MF, ME.

l:o Emedan MD + ME > DE, a; så måste äfven MD + MA>DE, d, v. s. DA >DE. T8 Tredje Boken.

Vidare, BE = CE och EF

a. 20 prop. 1. är gemensam

b. 24 prop. 1. f5r båda tri_

c. 5 axiom. angjarna BEP

K och CEP, men vinkeln BEF >CEF; således måste FB > FC, b, h. s. b. På samma sätt bevises, att FC>FG.

Slutligen, emedan EF + FG >EG, a; så måste äfven EF + FG > ED, och således FG > FD, c, h, s. b.

2:o Om man ritar vinkeln FEH^FEG, a, och drager FH; så skall det bevisas, att FG=FH.

Bevis. Emedan EG = EH, efter de äro radier i samma cirkel, och EF är gemensam till båda trianglarna GEF och HEF,, samt mellanliggande vinklarne vid E äro gjorda lika stora, så måste basen FG - FH, b; h. s. b.

a. 23 prop. 1. Om man nu på högra sidan

b. 4 prop. 1. om AD? utom FH? äfven kunde draga FK rz FG; så skulle den lineen FH, som ar längre från den

största, vara lika stor med den, FK, som är närmare intill henne, hvilket strider emot hvad förut är beyist i denna proposition. Alltså kunna blott 2 och 2 lika stora räta lineer dragas från den gifna punkten till peripherien, en på hvardera sidan om den största el ler minsta, h, s. b.

Tredje Boken. 79

VIII Proposition, Theorem.

Om man från en punkt utom en cirkel drager räta lineer till cirkelns peripheri; af hvilka en går genom medelpunkten; så är, bland dem, som falla pä den frånböjda (con-cava) delen af cirkelns peripheri, den störst, som går genom medelpunkten; och bland de öfriga är den större, som är närmare intill den, som går genom

medelpunkten, än den> som är längre från henne.

Men bland dem, som falla på den åtboj-da (convexa) delen af peripherien, är den minst, som är imellan punkten och diame~ tern; och bland de öfriga är den mindre, som är närmare intill den minsta, än den, som är längre från henne.

Från den gifna punkten kunna blott 2 och 2 räta lineer, som äro lika stora, dragas till peripherien, en på hvardera sidan om den minsta.

Låt M vara medelpunkten till cirkeln ACB; så skall det bevisas;

l:oattDA>DE>DF>DC.

2:o attDO <DL < DI < DH.

3:o att DB kan vara lika stor med DI; men att ingen annan linea, på högra sidan om DL, kan från D dragas till peripherien, lika stor med DI.

Bevis. Drag radierna ML, Ml, MH, MC, MF, ME.

l:o Emedan MD + ME > DE, a; så måste äfven MD + MA>DE, d, v. s. DA >DE.80

a. 20 prop. l,

b. 24 prop. l,

c. 5 axiom. f d. 21 prop. 1.

e. 23 prop. 1. f.

Vidare, emedan DM är gemensam för båda trianglarna DME 4 prop. 1. och DMF, och men vinkeln DME

> DMF; så måste DE > DF, b. På samma sätt bevises, att DF

> DC; alltså är DA > DE > DF>DC, h. s. b.

2:o Emedan DL +. LM > DM, a; men LM- OM; så måste DL >DO, c, eller DO < DL.

Vidare emedan DL -f- LM < DI -f IM , d, och LM = IM; så måste DL< DI. c.

r

På »amma sätt bevises, att DI< DH; alltså DL< DI< DH, h. s. b.

3:o Gör vinkeln OMB = OMI, e, och drag DB. Emedan IM=BM, DM gemensam för båda trianglarna DMI, DMB, samt mellanliggande vinklarne vid M lika stora; sä måste basen DB = DI, f. Men ingen annan linea än DB kan dragas, från D till peripherien, lika stor med DI, på högra sidan om DO; ty om DN kunde äfven vara lika stor med DI; så vore DB = D]V, d. v. s. den lineen, som är närmare intill deri minsta, vore lika stor med den, som är längre från henne; hvilket är omöjligt. Alltså kunna blott 2 och 2 lika stora räta lineer dragas från D till peripherien, en på hvardera sidan om den minsta; h. s. b,

IX Proposition. Theorem.

Om flera, än Z:ne räta lineer, DA, DB, DC, som äro lika stora, kunna dragas från en punkt D till en cirkels peripheri; så är denna punkt cirkelns medelpunkt.

Bevis. Ty om icke D vore medelpunkten, så låt någon an-IG ~nan punkt E vara medelpunkt, och drag räta lineen FG genom D och E.

Då skulle DA >DB >DC, a, hvilket strider emot hypothésen. Alltså kan ej E vara medelpunkten till cirkeln ABG. På sam- a. 7 prop. 3. ma sätt bevises, att ingen annan punkt än D kan vara det; alltså är D medelpunkten, h. s. b.

JL Proposition*

En cirkelperipheri kan ej skära en annan cirkelperipheri uti flzra, än Z:ne punkter.

B

KH.

Bevis. Ty om det vore möjligt, att cirkelperipherien ABCH skure BEGHuti tre punkter, B, G, H, och BEGH ändock vore en cirkelperipheri: så låt K vara cirkelns ABCH medelpunkt^ och drag KG, KB, Emedan dessa 3:ne lineer äro lika stora,

så måste K vara medelpunkt äfven till cirkeln 80

a. 20 prop. l,

b. 24 prop. l,

c. 5 axiom. f d. 21 prop. 1.

e. 23 prop. 1. f.

Vidare, emedan DM är gemensam för båda trianglarna DME 4 prop. 1. och DMF, och men vinkeln DME

> DMF; så måste DE > DF, b. På samma sätt bevises, att DF

> DC; alltså är DA > DE > DF>DC, h. s. b.

2:o Emedan DL +. LM > DM, a; men LM- OM; så måste DL >DO, c, eller DO < DL.

Vidare emedan DL -f- LM < DI -f IM , d, och LM = IM; så måste DL< DI. c.

r

På »amma sätt bevises, att DI< DH; alltså DL< DI< DH, h. s. b.

3:o Gör vinkeln OMB = OMI, e, och drag DB. Emedan IM=BM, DM gemensam för båda trianglarna DMI, DMB, samt mellanliggande vinklarne vid M lika stora; sä måste basen DB = DI, f. Men ingen annan linea än DB kan dragas, från D till peripherien, lika stor med DI, på högra sidan om DO; ty om DN kunde äfven vara lika stor med DI; så vore DB = D]V, d. v. s. den lineen, som är närmare intill deri minsta, vore lika stor med den, som är längre från henne; hvilket är omöjligt. Alltså kunna blott 2 och 2 lika stora räta lineer dragas från D till peripherien, en på hvardera sidan om den minsta; h. s. b,

IX Proposition. Theorem.

Om flera, än Z:ne räta lineer, DA, DB, DC, som äro lika stora, kunna dragas från en punkt D till en cirkels peripheri; så är denna punkt cirkelns medelpunkt.

Bevis. Ty om icke D vore medelpunkten, så låt någon an-IG ~nan punkt E vara medelpunkt, och drag räta lineen FG genom D och E.

Då skulle DA >DB >DC, a, hvilket strider emot hypothésen. Alltså kan ej E vara medelpunkten till cirkeln ABG. På sam- a. 7 prop. 3. ma sätt bevises, att ingen annan punkt än D kan vara det; alltså är D medelpunkten, h. s. b.

JL Proposition*

En cirkelperipheri kan ej skära en annan cirkelperipheri uti flzra, än Z:ne punkter.

B

KH.

Bevis. Ty om det vore möjligt, att cirkelperipherien ABCH skure BEGHuti tre punkter, B, G, H, och BEGH ändock vore en cirkelperipheri: så låt K vara cirkelns ABCH medelpunkt^ och drag KG, KB, Emedan dessa 3:ne lineer äro lika stora,

så måste K vara medelpunkt äfven till cirkeln 80

Tredje Boken.

a. 20 prop. l,

b. 24 prop. l,

c. 5 axiom. f d. 21 prop. 1.

e. 23 prop. 1. f.

Vidare, emedan DM är gemensam för båda trianglarna DME 4 prop. 1. och DMF, och men vinkeln DME

> DMF; så måste DE > DF, b. På samma sätt bevises, att DF

> DC; alltså är DA > DE > DF>DC, h. s. b.

2:o Emedan DL +. LM > DM, a; men LM- OM; så måste DL >DO, c, eller DO < DL.

Vidare emedan DL -f- LM < DI -f IM , d, och LM = IM; så måste DL< DI. c.

r

På »amma sätt bevises, att DI< DH; alltså DL< DI< DH, h. s. b.

3:o Gör vinkeln OMB = OMI, e, och drag DB. Emedan IM=BM, DM gemensam för båda trianglarna DMI, DMB, samt mellanliggande vinklarne vid M lika stora; sä måste basen DB = DI, f. Men ingen annan linea än DB kan dragas, från D till peripherien, lika stor med DI, på högra sidan om DO; ty om DN kunde äfven vara lika stor med DI; så vore DB = D]V, d. v. s. den lineen, som är närmare intill deri minsta, vore lika stor med den, som är längre från henne; hvilket är omöjligt. Alltså kunna blott 2 och 2 lika stora räta lineer dragas från D till peripherien, en på hvardera sidan om den minsta; h. s. b,

Tredje Boken.

81

IX Proposition. Theorem.

Om flera, än Z:ne räta lineer, DA, DB, DC, som äro lika stora, kunna dragas från en punkt D till en cirkels peripheri; så är denna punkt cirkelns medelpunkt.

Bevis. Ty om icke D vore medelpunkten, så låt någon an-IG ~nan punkt E vara medelpunkt, och drag räta lineen FG genom D och E.

Då skulle DA >DB >DC, a, hvilket strider emot hypothésen. Alltså kan ej E vara medelpunkten till cirkeln ABG. På sam- a. 7 prop. 3. ma sätt bevises, att ingen annan punkt än D kan vara det; alltså är D medelpunkten, h. s. b.

JL Proposition*

En cirkelperipheri kan ej skära en annan cirkelperipheri uti flzra, än Z:ne punkter.

B

KH.

Bevis. Ty om det vore möjligt, att cirkelperipherien ABCH skure BEGHuti tre punkter, B, G, H, och BEGH ändock vore en cirkelperipheri: så låt K vara cirkelns ABCH medelpunkt^ och drag KG, KB, Emedan dessa 3:ne lineer äro lika stora,

så måste K vara medelpunkt äfven till cirkeln82

a. 9 pr öp. 3.

b. 5 prop. 3.

BEGH, a; och då skulle tvänne

cirklar, som skära hvarandra, hafva

samma medelpunkt, hvilket är omöjligt, b. Allt

så kunna icke 2:ne cirkelperipherier skära hvar

andra uti flera an 2:ne punkter; h. s. b.

XI Proposition. Theorem*

Om tvänne cirklar tangera hvarandra innantill, och man drager ut den räta lineen, som sammanbinder deras medelpunkter ; så går hon genom langeringspunkten.

Bevis. Ty om tan-geringspunkten vore A, och medelpunkten till cirkeln ABC vore F, och till ADE vore G; så att CH vore den räta lineen som sammanbinder dem:

så drag ÄG, AF. Då är AF = FH, emedan de äro radier uti samma cirkel; menAG4-GF> a. 20 prop. 1. AF, a; derföre måste äfven ÄG »f GF >FH, eller ÄG >GH.

Vidare är ÄG-GD, emedan de äro radier i samma cirkel; således är GDirGH, en del lika stor med sitt hela, hvilket är omöjligt. Alltså kan ej den räta lineen, som sammanbinder medelpunkterna, vara CH. På samma sätt bevises, att ingen annan rät linea utom AF kan sammanbinda cirklarnas medelpunk-

ter; och således går denna sammanbindande linea genom punkten A.

XII Proposition. Theorem.

Om tvänne cirklar tangera hvarandra utantill, så går den räta lineen., som samman-binder deras medelpunkter, genom tangerings-punliten.

Bevis. Ty om tangérings-punkten är A, men cirklarnas medelpunkter vore F och G; så skulle FC = FA och GD^GA, och således

FC-f GD-FA + GA, . . a. Men FG > FC 4 GD; derföre måste a. 2 axiom

FG>FA + GA, b. 20 prop. 1.

hvilket är omöjligt, b. Således kan icke FG vara den räta linea, som förenar cirklarnas medelpunkter t och på samma sätt bevises, att det ej kan vara någon annan rät linea, än en, som går genom A; h. s. b.

XIII Proposition. Theorem.

En cirkel kan ej tangera en annan cirkel uti Jlera än en punkt, antingen han tangerar utantill eller innantill. 82

a. 9 pr öp. 3.

b. 5 prop. 3.

BEGH, a; och då skulle tvänne

cirklar, som skära hvarandra, hafva

samma medelpunkt, hvilket är omöjligt, b. Allt

så kunna icke 2:ne cirkelperipherier skära hvar

andra uti flera an 2:ne punkter; h. s. b.

XI Proposition. Theorem*

Om tvänne cirklar tangera hvarandra innantill, och man drager ut den räta lineen, som sammanbinder deras medelpunkter ; så går hon genom langeringspunkten.

Bevis. Ty om tan-geringspunkten vore A, och medelpunkten till cirkeln ABC vore F, och till ADE vore G; så att CH vore den räta lineen som sammanbinder dem:

så drag ÄG, AF. Då är AF = FH, emedan de äro radier uti samma cirkel; menAG4-GF> a. 20 prop. 1. AF, a; derföre måste äfven ÄG »f GF >FH, eller ÄG >GH.

Vidare är ÄG-GD, emedan de äro radier i samma cirkel; således är GDirGH, en del lika stor med sitt hela, hvilket är omöjligt. Alltså kan ej den räta lineen, som sammanbinder medelpunkterna, vara CH. På samma sätt bevises, att ingen annan rät linea utom AF kan sammanbinda cirklarnas medelpunk-

ter; och således går denna sammanbindande linea genom punkten A.

XII Proposition. Theorem.

Om tvänne cirklar tangera hvarandra utantill, så går den räta lineen., som samman-binder deras medelpunkter, genom tangerings-punliten.

Bevis. Ty om tangérings-punkten är A, men cirklarnas medelpunkter vore F och G; så skulle FC = FA och GD^GA, och således

FC-f GD-FA + GA, . . a. Men FG > FC 4 GD; derföre måste a. 2 axiom

FG>FA + GA, b. 20 prop. 1.

hvilket är omöjligt, b. Således kan icke FG vara den räta linea, som förenar cirklarnas medelpunkter t och på samma sätt bevises, att det ej kan vara någon annan rät linea, än en, som går genom A; h. s. b.

XIII Proposition. Theorem.

En cirkel kan ej tangera en annan cirkel uti Jlera än en punkt, antingen han tangerar utantill eller innantill. 82

a. 9 pr öp. 3.

b. 5 prop. 3.

BEGH, a; och då skulle tvänne

cirklar, som skära hvarandra, hafva

samma medelpunkt, hvilket är omöjligt, b. Allt

så kunna icke 2:ne cirkelperipherier skära hvar

andra uti flera an 2:ne punkter; h. s. b.

XI Proposition. Theorem*

Om tvänne cirklar tangera hvarandra innantill, och man drager ut den räta lineen, som sammanbinder deras medelpunkter ; så går hon genom langeringspunkten.

Bevis. Ty om tan-geringspunkten vore A, och medelpunkten till cirkeln ABC vore F, och till ADE vore G; så att CH vore den räta lineen som sammanbinder dem:

så drag ÄG, AF. Då är AF = FH, emedan de äro radier uti samma cirkel; menAG4-GF> a. 20 prop. 1. AF, a; derföre måste äfven ÄG »f GF >FH, eller ÄG >GH.

Vidare är ÄG-GD, emedan de äro radier i samma cirkel; således är GDirGH, en del lika stor med sitt hela, hvilket är omöjligt. Alltså kan ej den räta lineen, som sammanbinder medelpunkterna, vara CH. På samma sätt bevises, att ingen annan rät linea utom AF kan sammanbinda cirklarnas medelpunk-

ter; och således går denna sammanbindande linea genom punkten A.

XII Proposition. Theorem.

Om tvänne cirklar tangera hvarandra utantill, så går den räta lineen., som samman-binder deras medelpunkter, genom tangerings-punliten.

Bevis. Ty om tangérings-punkten är A, men cirklarnas medelpunkter vore F och G; så skulle FC = FA och GD^GA, och således

FC-f GD-FA + GA, . . a. Men FG > FC 4 GD; derföre måste a. 2 axiom

FG>FA + GA, b. 20 prop. 1.

hvilket är omöjligt, b. Således kan icke FG vara den räta linea, som förenar cirklarnas medelpunkter t och på samma sätt bevises, att det ej kan vara någon annan rät linea, än en, som går genom A; h. s. b.

XIII Proposition. Theorem.

En cirkel kan ej tangera en annan cirkel uti Jlera än en punkt, antingen han tangerar utantill eller innantill. 82

a. 9 pr öp. 3.

b. 5 prop. 3.

BEGH, a; och då skulle tvänne

cirklar, som skära hvarandra, hafva

samma medelpunkt, hvilket är omöjligt, b. Allt

så kunna icke 2:ne cirkelperipherier skära hvar

andra uti flera an 2:ne punkter; h. s. b.

XI Proposition. Theorem*

Om tvänne cirklar tangera hvarandra innantill, och man drager ut den räta lineen, som sammanbinder deras medelpunkter ; så går hon genom langeringspunkten.

Bevis. Ty om tan-geringspunkten vore A, och medelpunkten till cirkeln ABC vore F, och till ADE vore G; så att CH vore den räta lineen som sammanbinder dem:

så drag ÄG, AF. Då är AF = FH, emedan de äro radier uti samma cirkel; menAG4-GF> a. 20 prop. 1. AF, a;

derföre måste äfven ÄG »f GF >FH, eller ÄG >GH.

Vidare är ÄG-GD, emedan de äro radier i samma cirkel; således är GDirGH, en del lika stor med sitt hela, hvilket är omöjligt. Alltså kan ej den räta lineen, som sammanbinder medelpunkterna, vara CH. På samma sätt bevises, att ingen annan rät linea utom AF kan sammanbinda cirklarnas medelpunk-

ter; och således går denna sammanbindande linea genom punkten A.

XII Proposition. Theorem.

Om tvänne cirklar tangera hvarandra utantill, så går den räta lineen., som samman-binder deras medelpunkter, genom tangerings-punliten.

Bevis. Ty om tangérings-punkten är A, men cirklarnas medelpunkter vore F och G; så skulle FC = FA och GD^GA, och således

FC-f GD-FA + GA, . . a. Men FG > FC 4 GD; derföre måste a. 2 axiom

FG>FA + GA, b. 20 prop. 1.

hvilket är omöjligt, b. Således kan icke FG vara den räta linea, som förenar cirklarnas medelpunkter t och på samma sätt bevises, att det ej kan vara någon annan rät linea, än en, som går genom A; h. s. b.

XIII Proposition. Theorem.

En cirkel kan ej tangera en annan cirkel uti Jlera än en punkt, antingen han tangerar utantill eller innantill.81

Bevis Ty om BED och B FD vore tvänne cirklar, som tangerade hvarandra uti punkterna B och D, och C och H vore dessa cirklars medelpunk-a. 11 prop. 3. ter, så måste rä-ID ta lineen CH gå genom B och D, om hon utdrages, a. Således vore CB = CD, emedan de vore radier i samma cirkel, och alltså CB >HD, samt ännu mera HB > HD. Men HB - HD, emedan äfven de voro radier i cirkeln, BFD. Således skulle HB > HD, och HB = HD, hvilket är omöjligt. Alltså kunna tvänne cirklar ej tangera hvarandra innantill i flera än en punkt.

Om åter KAEG och EBD vore tvänne cirklar, som tangerade hvarandra utantill uti punkterna E och G; så skulle en rät linea kunna dra-b. 12 prop. 3. gas genom punkterna G, E och .genom medelpunkten för cirkeln K ÄG, b, och en annan rät linea kunna dragas genom G, C och genom medelpunkten för cirkeln K ÄG, b, hvilka tvänne räta lineer således skulle innesluta ett rum, hvilket är om&jligt. Alltså kunna ej tvänne cirklar tangera hvarandra utantill i flera än en punkt, h. s. b.

Proposition. Theorem.

Ve räta lineer, som äro lika stora uti en cirkel, äro lika långt från medelpunkten;

och om de äro lika långt från medelpunkten, så äro de lika stora.

l:o Låt ABML vara en cirkel, hvars medelpunkt är C, och låt C F vara vinkelrät mot AB, och CK mot LM, samt låt CF = CK, a; så skall det bevisas, att AB - LM.

M

Bevis. Drag radierna CB, CM.

Emedan då CF är dragen från a. 4 defin. 3. medelpunkten vinkelrät mot AB, b. 3 prop. 3. så måste AF ~ FB, b; och således ^ 4| Pr?P- l AB dubbelt så stor som FB. På axiom*

samma sätt bevises att LM är dubbelt så stor som KM.

Vidare, efter vinklarne CFB och CKM äro räta, så måste

_ g ____2

och ... CK + KM2=CM2. . .c,

Men nu är CM = CB, och således CM* - CB;

således måste CF + FB = CK.2 + KM;

och då enligthypoth.CF=CK,ochsåledes^F-CK;

så måste .... Ffi2= KM, d, d. v. s. FB = KM; och alltså dubbla FB = dubbla KM, d. v. s AB = LM,

h. s. b.

2:o Låt AB = LM; så skall det bevisas, att CF = CK. 81

Tredje Boken.

Bevis Ty om BED och B FD vore tvänne cirklar, som tangerade hvarandra uti punkterna B och D, och C och H vore dessa cirklars medelpunk-a. 11 prop. 3. ter, så måste rä-ID ta lineen CH gå genom B och D, om hon utdrages, a. Således vore CB = CD, emedan de vore radier i samma cirkel, och alltså CB >HD, samt ännu mera HB > HD. Men HB - HD, emedan äfven de voro radier i cirkeln, BFD. Således skulle HB > HD, och HB = HD, hvilket är omöjligt. Alltså kunna tvänne cirklar ej tangera hvarandra innantill i flera än en punkt.

Om åter KAEG och EBD vore tvänne cirklar, som tangerade hvarandra utantill uti punkterna E och G; så skulle en rät linea kunna dra-b. 12 prop. 3. gas genom punkterna G, E och .genom medelpunkten för cirkeln K ÄG, b, och en annan rät linea kunna dragas genom G, C och genom medelpunkten för cirkeln K ÄG, b, hvilka tvänne räta lineer således skulle innesluta ett rum, hvilket är om&jligt. Alltså kunna ej tvänne cirklar tangera hvarandra utantill i flera än en punkt, h. s. b.

Proposition. Theorem.

Ve räta lineer, som äro lika stora uti en cirkel, äro lika långt från medelpunkten;

Tredje Boken.

85

och om de äro lika långt från medelpunkten, så äro de lika stora.

l:o Låt ABML vara en cirkel, hvars medelpunkt är C, och låt C F vara vinkelrät mot AB, och CK mot LM, samt låt CF = CK, a; så skall det bevisas, att AB - LM.

M

Bevis. Drag radierna CB, CM.

Emedan då CF är dragen från a. 4 defin. 3. medelpunkten vinkelrät mot AB, b. 3 prop. 3. så måste AF ~ FB, b; och således ^ 4| Pr?P- l AB dubbelt så stor som FB. På axiom*

samma sätt bevises att LM är dubbelt så stor som KM.

Vidare, efter vinklarne CFB och CKM äro räta, så måste

_ g ____2

och ... CK + KM2=CM2. . .c,

Men nu är CM = CB, och således CM* - CB;

således måste CF + FB = CK.2 + KM;

och då enligthypoth.CF=CK,ochsåledes^F-CK;

så måste .... Ffi2= KM, d, d. v. s. FB = KM; och alltså dubbla FB = dubbla KM, d. v. s AB = LM,

h. s. b.

2:o Låt AB = LM; så skall det bevisas, att CF = CK.86

På samma sätt, som i det föregående, bevises då, att AB är dubbelt så stor som FB, och LM dubbelt så stor som KM; och efter då AB = LM; så måste äfven halfparten FB = KM.

Nu är CF

FB2= CB*

och

Men .... CB=CM;

derföre måste CF + FB == CK** KM ;

och då enligt hypoth. FB = KM, eller FB*=: KM;

så måste CF=.CK9å9 eller CF = CK, h. s. b.

XV Proposition* Theorem.

Diametern är den största räta linea uti en cirkel, och bland de öfriga är den större, som är närmare intill diametern, än den, som är längre från honom,

Om E är medelpunkt till cirkeln ABC, och EK är vinkelrät mot FG, och EH mot BC, samt EK >EH; så skall det bevisas, att

AD>BC>FG.

Bevis. Gör EL^ EH, och drag, genom L, MN vinkelrät mot EK, samt radierna EM, EF, EG, EN

DåmåsteBC=MNa. Men ME a. 14 prop. 3. + EN> MN, b; derföre måste ME *>. 20 Pr°P- *. + EN>BC.

Vidare är ME + EN = AD; alltså är AD > BC.

Åter efter ME =: FE och EN = EG, men

vinkeln MEN > FEN; så måste,MN > FG, d. v. s. att BC >FG; alltså är

AD>BC>FG, h. s. b.

XVI Proposition. Theorem*

l:o En rät linea, som drages genom yttersta ändan af diametern uti en cirkel, vinkelrät emot honom, faller hel och hållen ut om cirkeln.

2:o Imellan denna vinkelräta linea och cirkelns peripheri kan, genom yttersta ändan af diametern, ingen annan rät linea dragas.

3:o Den vinkeln, som cirkelns peripheri formerar m$d diametern, är större än någon rätlinig spetsig vinkel; men den vinkeln, som cirkelns peripheri formerar med den vinkelräta lineen, är mindre än någon rätlinig spetsig vinkel.

l:o Låt D vara medelpunkt till cirkeln AFB; så skall det bevisas, att, om en rät linea drages genom A9 vinkelrät mot AB, faller hon hel och hållen utom cirkeln.

Bevis. Ty om denna vinkelräta lineen, ej folie såsom EA? utan såsom FA, så att hon traf-

På samma sätt, som i det föregående, bevises då, att AB är dubbelt så stor som FB, och LM dubbelt så stor som KM; och efter då AB = LM; så måste äfven halfparten FB = KM.

Nu är CF

FB2= CB*

och

Men .... CB=CM;

derföre måste CF + FB == CK** KM ;

och då enligt hypoth. FB = KM, eller FB*=: KM;

så måste CF=.CK9å9 eller CF = CK, h. s. b.

XV Proposition* Theorem.

Diametern är den största räta linea uti en cirkel, och bland de öfriga är den större, som är närmare intill diametern, än den, som är längre från honom,

Om E är medelpunkt till cirkeln ABC, och EK är vinkelrät mot FG, och EH mot BC, samt EK >EH; så skall det bevisas, att

AD>BC>FG.

Bevis. Gör EL^ EH, och drag, genom L, MN vinkelrät mot EK, samt radierna EM, EF, EG, EN

DåmåsteBC=MNa. Men ME a. 14 prop. 3. + EN> MN, b; derföre måste ME *>. 20 Pr°P- *. + EN>BC.

Vidare är ME + EN = AD; alltså är AD > BC.

Åter efter ME =: FE och EN = EG, men

vinkeln MEN > FEN; så måste,MN > FG, d. v. s. att BC >FG; alltså är

AD>BC>FG, h. s. b.

XVI Proposition. Theorem*

l:o En rät linea, som drages genom yttersta ändan af diametern uti en cirkel, vinkelrät emot honom, faller hel och hållen ut om cirkeln.

2:o Imellan denna vinkelräta linea och cirkelns peripheri kan, genom yttersta ändan af diametern, ingen annan rät linea dragas.

3:o Den vinkeln, som cirkelns peripheri formerar m$d diametern, är större än någon rätlinig spetsig vinkel; men den vinkeln, som cirkelns peripheri formerar med den vinkelräta lineen, är mindre än någon rätlinig spetsig vinkel.

l:o Låt D vara medelpunkt till cirkeln AFB; så skall det bevisas, att, om en rät linea drages genom A9 vinkelrät mot AB, faller hon hel och hållen utom cirkeln.

Bevis. Ty om denna vinkelräta lineen, ej folie såsom EA? utan såsom FA, så att hon traf-

7 86

Tredje Boken.

På samma sätt, som i det föregående, bevises då, att AB är dubbelt så stor som FB, och LM dubbelt så stor som

KM; och efter då AB = LM; så måste äfven halfparten FB = KM.

Nu är CF

FB2= CB*

och

Men .... CB=CM;

derföre måste CF + FB == CK** KM ;

och då enligt hypoth. FB = KM, eller FB*=: KM;

så måste CF=.CK9å9 eller CF = CK, h. s. b.

XV Proposition* Theorem.

Diametern är den största räta linea uti en cirkel, och bland de öfriga är den större, som är närmare intill diametern, än den, som är längre från honom,

Om E är medelpunkt till cirkeln ABC, och EK är vinkelrät mot FG, och EH mot BC, samt EK >EH; så skall det bevisas, att

AD>BC>FG.

Bevis. Gör EL^ EH, och drag, genom L, MN vinkelrät mot EK, samt radierna EM, EF, EG, EN

DåmåsteBC=MNa. Men ME a. 14 prop. 3. + EN> MN, b; derföre måste ME *>. 20 Pr°P- *. + EN>BC.

Vidare är ME + EN = AD; alltså är AD > BC.

Åter efter ME =: FE och EN = EG, men

vinkeln MEN > FEN; så måste,MN > FG, d. v. s. att BC >FG; alltså är

AD>BC>FG, h. s. b.

XVI Proposition. Theorem*

l:o En rät linea, som drages genom yttersta ändan af diametern uti en cirkel, vinkelrät emot honom, faller hel och hållen ut om cirkeln.

2:o Imellan denna vinkelräta linea och cirkelns peripheri kan, genom yttersta ändan af diametern, ingen annan rät linea dragas.

3:o Den vinkeln, som cirkelns peripheri formerar m$d diametern, är större än någon rätlinig spetsig vinkel; men den vinkeln, som cirkelns peripheri formerar med den vinkelräta lineen, är mindre än någon rätlinig spetsig vinkel.

l:o Låt D vara medelpunkt till cirkeln AFB; så skall det bevisas, att, om en rät linea drages genom A9 vinkelrät mot AB, faller hon hel och hållen utom cirkeln.

Bevis. Ty om denna vinkelräta lineen, ej folie såsom EA? utan såsom FA, så att hon traf-

fade cirkelns peripheri äfven i punkten F; sammanbind D och F:

GE Då är DA = DF,och så-

ledes vinkeln DAF ~ DFA, a.

a. 5 prop. 1. Men DAF är

b. 17'prop. 1. antagen vara en rät vinkel; derföre måste bå ,da vinklarna DAF och DFA

vara räta, hvilket är omöjligt, b. Alltså kan ej den räta lineen, som drages genom A, vinkelrät mot AB, träffa cirkeln uti någon mera punkt än A, och faller således hel och hållen utom cirkeln, h. g. b.

2:o Det skall bevisas, att ingen rät linea kan dragas imellan peripherien och den vinkelräta lineen EA, genom A. . .

Bevis. Ty om det vore möjligt, att t. ex. GA vore en rät linea, som går genom A imellan peripherien och EA; så drag DC, vinkelrät mot GA.

Då är DA, som står emot den räta vinkeln DCA, uti triangeln DAC, större än DC, c, hvil-c. 19 prop. 1. ket är omöjligt. Alltså kan ingen rät linea dragas genom A, imellan peripherien och EA, h. s. b.

3:o Slutligen skall d^t bevisas, att vinkeln, som formeras af bågen FOA och diametern AB, är större, än någon rätlinig spetsig vinkel; och att vinkeln, som formeras af bågen FOA och räta lineen EA, är mindre, än någon rätlinig spetsig vinkel;

< N

,fc

i

Tredje Boken. 89

Bevis. Ty det är förut bevist rara omöjligt, att genom A draga någon rät linea, emellan peripherien och bågen, som kunde med AB formera den större, och med EA den mindre vinkeln.

Corollarium. Om en rät linea drages, vinkelrät mot diametern, genom hans yttersta ända, så tangerar hon cirkeln.

Proposition . P rollie m.

Att från en gifven punkt, A, utom en cirkel, CBD , draga en rät linea, som tangk-rar honom.

Med samma medelpunkt, E, som för cirkeln CBD, rita genom A en peripheri, AFG; drag DF vinkelrät mot AE, a, sammanbind E med F, och A med B; så skall det bevisas, att AB tangerar cirkeln CBD.

Bevis. Emedan uti trianglarna AEB och FED, EA^EF och EB = ED, samt vinkeln E är gemensam för båda ; så måste vinkeln ABE = FDE, b. Men FDE är en rät a. 11 prop. 1. vinkel; derföre måste äfven ABE b- * Pr°P- 1- vara en rät vinkel; och alltså c' cor'roti11 10S tangerar räta lineen AB cirkeln p ^'

CBD, c; h. s. b.

7*.

88

Tredje Boken.

fade cirkelns peripheri äfven i punkten F; sammanbind D och F:

GE Då är DA = DF,och så-

ledes vinkeln DAF ~ DFA, a.

a. 5 prop. 1. Men DAF är

b. 17'prop. 1. antagen vara en rät vinkel; derföre måste bå ,da vinklarna DAF och DFA

vara räta, hvilket är omöjligt, b. Alltså kan ej den räta lineen, som drages genom A, vinkelrät mot AB, träffa cirkeln uti någon mera punkt än A, och faller således hel och hållen utom cirkeln, h. g. b.

2:o Det skall bevisas, att ingen rät linea kan dragas imellan peripherien och den vinkelräta lineen EA, genom A. .

.

Bevis. Ty om det vore möjligt, att t. ex. GA vore en rät linea, som går genom A imellan peripherien och EA; så drag DC, vinkelrät mot GA.

Då är DA, som står emot den räta vinkeln DCA, uti triangeln DAC, större än DC, c, hvil-c. 19 prop. 1. ket är omöjligt. Alltså kan ingen rät linea dragas genom A, imellan peripherien och EA, h. s. b.

3:o Slutligen skall d^t bevisas, att vinkeln, som formeras af bågen FOA och diametern AB, är större, än någon rätlinig spetsig vinkel; och att vinkeln, som formeras af bågen FOA och räta lineen EA, är mindre, än någon rätlinig spetsig vinkel;

< N

,fc

i

Bevis. Ty det är förut bevist rara omöjligt, att genom A draga någon rät linea, emellan peripherien och bågen, som kunde med AB formera den större, och med EA den mindre vinkeln.

Corollarium. Om en rät linea drages, vinkelrät mot diametern, genom hans yttersta ända, så tangerar hon cirkeln.

Proposition . P rollie m.

Att från en gifven punkt, A, utom en cirkel, CBD , draga en rät linea, som tangk-rar honom.

Med samma medelpunkt, E, som för cirkeln CBD, rita genom A en peripheri, AFG; drag DF vinkelrät mot AE, a, sammanbind E med F, och A med B; så skall det bevisas, att AB tangerar cirkeln CBD.

Bevis. Emedan uti trianglarna AEB och FED, EA^EF och EB = ED, samt vinkeln E är gemensam för båda ; så måste vinkeln ABE = FDE, b. Men FDE är en rät a. 11 prop. 1. vinkel; derföre måste äfven ABE b- * Pr°P- 1- vara en rät vinkel; och alltså c' cor'roti11 10S tangerar räta lineen AB cirkeln p ^'

CBD, c; h. s. b.

7*.

Vore den gifna punkten på peripherien, så är det klart, att man blott behöfver draga genom A en vinkelrät linea mot den diameter, som går genom A»

XVIM Proposition* Theorem.

Om en rät linea DE tangerar en cirkel ABC uti punkten C, så skall den radie, FC, som går genom tangeringspunkten, vara vinkelrät mot tangenten DE.

Bevis. Ty om icke FC är vinkelrät emot DE; så låt FG vara det.

Punkten G ligger då utanför cirkeln, a; så att FG > FC; men emedan uti triangeln CFG, vinkeln FGC är rät; så måste .a. 16 prop. 3. FCG vara mindre än en rät, b;

b. 17 prop. 1. och gåledés är FG< FC, c; alltså

c. 19 prop. 1. gkulle ^åde FG > FC och FG < FC, hvilket är omöjligt. Således är ingen annan linea, genom F, vinkelrät mot DE, än FC, h. s. b.

XIX Proposition* Theorem.

Om en rät linea, DE, tangerar en cirkel uti C, och man från tangeringspunkten drager en rät linea, CA, vinkelrät mot tangenten; så skall medelpunkten vara på denna vinkelräta linea CA.

t

Bevis. Ty om medelpunkten vore annorstädes än på CA, såsom uti F: sammanbind C och F.

Emedan då CF är en radie, som går genom tangeringspunkten, så måste FCE vara en rät vinkel, a; och då ACE är antagen vara en rät a. 18 prop. 3. vinkel, skulle vinkeln ACE = FCE, hvilket är omöjligt. Således kan ej F vara medelpunkten. På samma sätt bevises, att ingen annan punkt kan vara medelpunkt, förutan någon punkt på CA, h. s. b.

XX Proposition. Theorem. ,

Den vinkeln, som står vid medelpunkten uti en cirkel, är dubbelt så stor, som den, som står vid peripherien, om de båda stå på samma båge.

l:o. Det skall bevisas, att vinkeln BDE, vid medelpunkten D, är dubbelt så stor, som BAE vid

peripherien.

."

Bevis. DA = DB emedan de äro radier, derföre måste vinkeln DAB = DBA, a. Men vinkeln a. 5 prop. 1. BDE är lika stor med de vinklar, b- 82 Pr°P- *. DAB och DBA, tillsammans, som stå emot honom inuti triangeln ABD, b; och då dessa båda vink-

Vore den gifna punkten på peripherien, så är det klart, att man blott behöfver draga genom A en vinkelrät linea mot den diameter, som går genom A»

XVIM Proposition* Theorem.

Om en rät linea DE tangerar en cirkel ABC uti punkten C, så skall den radie, FC, som går genom tangeringspunkten, vara vinkelrät mot tangenten DE.

Bevis. Ty om icke FC är vinkelrät emot DE; så låt FG vara det.

Punkten G ligger då utanför cirkeln, a; så att FG > FC; men emedan uti triangeln CFG, vinkeln FGC är rät; så måste .a. 16 prop. 3. FCG vara mindre än en rät, b;

b. 17 prop. 1. och gåledés är FG< FC, c; alltså

c. 19 prop. 1. gkulle ^åde FG > FC och FG < FC, hvilket är omöjligt. Således är ingen annan linea, genom F, vinkelrät mot DE, än FC, h. s. b.

XIX Proposition* Theorem.

Om en rät linea, DE, tangerar en cirkel uti C, och man från tangeringspunkten drager en rät linea, CA, vinkelrät mot tangenten; så skall medelpunkten vara på denna vinkelräta linea CA.

Tredje Boken.

91

t

Bevis. Ty om medelpunkten vore annorstädes än på CA, såsom uti F: sammanbind C och F.

Emedan då CF är en radie, som går genom tangeringspunkten, så måste FCE vara en rät vinkel, a; och då ACE är antagen vara en rät a. 18 prop. 3. vinkel, skulle vinkeln ACE = FCE, hvilket är omöjligt. Således kan ej F vara medelpunkten. På samma sätt bevises, att ingen annan punkt kan vara medelpunkt, förutan någon punkt på CA, h. s. b.

XX Proposition. Theorem. ,

Den vinkeln, som står vid medelpunkten uti en cirkel, är dubbelt så stor, som den, som står vid peripherien, om de båda stå på samma båge.

l:o. Det skall bevisas, att vinkeln BDE, vid medelpunkten D, är dubbelt så stor, som BAE vid

peripherien.

."

Bevis. DA = DB emedan de äro radier, derföre måste vinkeln DAB = DBA, a. Men vinkeln a. 5 prop. 1. BDE är lika stor med de vinklar, b- 82 Pr°P- *. DAB och DBA, tillsammans, som stå emot honom inuti triangeln ABD, b; och då dessa båda vink-

Vore den gifna punkten på peripherien, så är det klart, att man blott behöfver draga genom A en vinkelrät linea mot den diameter, som går genom A»

XVIM Proposition* Theorem.

Om en rät linea DE tangerar en cirkel ABC uti punkten C, så skall den radie, FC, som går genom tangeringspunkten, vara vinkelrät mot tangenten DE.

Bevis. Ty om icke FC är vinkelrät emot DE; så låt FG vara det.

Punkten G ligger då utanför cirkeln, a; så att FG > FC; men emedan uti triangeln CFG, vinkeln FGC är rät; så måste .a. 16 prop. 3. FCG vara mindre än en rät, b;

b. 17 prop. 1. och gåledés är FG< FC, c; alltså

c. 19 prop. 1. gkulle ^åde FG > FC och FG < FC, hvilket är omöjligt. Således är ingen annan linea, genom F, vinkelrät mot DE, än FC, h. s. b.

XIX Proposition* Theorem.

Om en rät linea, DE, tangerar en cirkel uti C, och man från tangeringspunkten drager en rät linea, CA, vinkelrät mot tangenten; så skall medelpunkten vara på denna vinkelräta linea CA.

t

Bevis. Ty om medelpunkten vore annorstädes än på CA, såsom uti F: sammanbind C och F.

Emedan då CF är en radie, som går genom tangeringspunkten, så måste FCE vara en rät vinkel, a; och då ACE är antagen vara en rät a. 18 prop. 3. vinkel, skulle vinkeln ACE = FCE, hvilket är omöjligt. Således kan ej F vara medelpunkten. På samma sätt bevises, att ingen annan punkt kan vara medelpunkt, förutan någon punkt på CA, h. s. b.

XX Proposition. Theorem. ,

Den vinkeln, som står vid medelpunkten uti en cirkel, är dubbelt så stor, som den, som står vid peripherien, om de båda stå på samma båge.

l:o. Det skall bevisas, att vinkeln BDE, vid medelpunkten D, är dubbelt så stor, som BAE vid

peripherien.

."

Bevis. DA = DB emedan de äro radier, derföre måste vinkeln DAB = DBA, a. Men vinkeln a. 5 prop. 1. BDE är lika stor med de vinklar, b- 82 Pr°P- *. DAB och DBA, tillsammans, som stå emot honom inuti triangeln ABD, b; och då dessa båda vink-

Vore den gifna punkten på peripherien, så är det klart, att man blott behöfver draga genom A en vinkelrät linea mot den diameter, som går genom A»

XVIM Proposition* Theorem.

Om en rät linea DE tangerar en cirkel ABC uti punkten C, så skall den radie, FC, som går genom tangeringspunkten, vara vinkelrät mot tangenten DE.

Bevis. Ty om icke FC är vinkelrät emot DE; så låt FG vara det.

Punkten G ligger då utanför cirkeln, a; så att FG > FC; men emedan uti triangeln CFG, vinkeln FGC är rät; så måste .a. 16 prop. 3. FCG vara mindre än en rät, b;

b. 17 prop. 1. och gåledés är FG< FC, c; alltså

c. 19 prop. 1. gkulle ^åde FG > FC och FG < FC, hvilket är omöjligt. Således är ingen annan linea, genom F, vinkelrät mot DE, än FC, h. s. b.

XIX Proposition* Theorem.

Om en rät linea, DE, tangerar en cirkel uti C, och man från tangeringspunkten drager en rät linea, CA, vinkelrät mot tangenten; så skall medelpunkten vara på denna vinkelräta linea CA.

t

Bevis. Ty om medelpunkten vore annorstädes än på CA, såsom uti F: sammanbind C och F.

Emedan då CF är en radie, som går genom tangeringspunkten, så måste FCE vara en rät vinkel, a; och då ACE är antagen vara en rät a. 18 prop. 3. vinkel, skulle vinkeln ACE = FCE, hvilket är omöjligt. Således kan ej F vara medelpunkten. På samma sätt bevises, att ingen annan punkt kan vara medelpunkt, förutan någon punkt på CA, h. s. b.

XX Proposition. Theorem. ,

Den vinkeln, som står vid medelpunkten uti en cirkel, är dubbelt så stor, som den, som står vid peripherien, om de båda stå på samma båge.

l:o. Det skall bevisas, att vinkeln BDE, vid medelpunkten D, är dubbelt så stor, som BAE vid

peripherien.

."

Bevis. DA = DB emedan de äro radier, derföre måste vinkeln DAB = DBA, a. Men vinkeln a. 5 prop. 1. BDE är lika stor med de vinklar, b- 82 Pr°P- *. DAB och DBA, tillsammans, som stå emot honom inuti triangeln ABD, b; och då dessa båda vink-

lar äro lika stora, så måste BDE rara dubbelt så stor, som BAB, h. s. b.

2:o Det skall bevisas, att BDC är dubbelt så stor som BAC.

Bevis. Drag diametern AE. Enligt föregående bevis är då vinkeln BDE dubbelt så stor, som BAE; och på samma sätt bevisas, att EDC är dubbelt så stor, som EAC. Alltså måste hela vinkeln BDC vara dubbelt så stor, som hela vinkeln BAC, h. s. b.

3:o Det skall bevisas, att vinkeln BDC är dubbelt så stor, som BEC.

Bevis. Drag diametern AE. Enligt första beviset i denna proposition är då vinkeln ADB dubbelt så stor, som AEB; och enligt samma bevis måste även vinkeln ADC vara dubbelt så stor, som AEC. Om man då tager ADC från ADB, så blir återstoden BDC dubbelt så stor, som återstoden BEC, då man tager AEC från AEB; h. s. b.

XXI Proposition* Theorem.

De vinklar, som stå i samma cirkelsegment, äro lika stora.

l:o Det skall bevisas, att vinkeln BÅD = BED.

Bevis. Om man från medelpunkten F drager FB och FD; så äro vinklarna BÅD och BED halfparten af B FD, a, alltså äro a. 20 prop. 8. de äfven sinsimellan lika stora, b; V T axiom. h, s. b.

2:o Om cirkelsegmentet är mindre, än half-cirkeln, såsom segmentet BAE; så skall det bevisas, att vinkeln BAE=BHE.

" Bevis. Drag räta lineen AH. Uti trianglarna BAK och EHK är vinkeln ABH = AEH, enligt nästföregående bevis, emedan de stå uti samma cirkelsegment ABDEH, som är större än half-cirkeln. Uti samma båda trianglar är vinkeln A KB = EKH, a; derföre måste den tredje vinkeln BAK, a. 15 prop. 1. d. v. s. BAE, vara lika stor .med b- 32 Pr°P- l den tredje vinkeln KHE, d. v. s. med BHE, b; h. s. b.

Proposition, Theorem.

Uti fyrsidiga Jigurer^ hvilkas vinklar stå uti en cirkels peripheri, äro de vinklar, som stå midtemot hvarandra, tillhopatagna lika stora med tvänne räta.

Det skall bevisas, att vinklarna BA3£+BCT> =: 2:ne räta vinklar; och att vinklarna ABC + ADC = 2:ne räta vinklar.

92

Tredje Boken.

lar äro lika stora, så måste BDE rara dubbelt så stor, som BAB, h. s. b.

2:o Det skall bevisas, att BDC är dubbelt så stor som BAC.

Bevis. Drag diametern AE. Enligt föregående bevis är då vinkeln BDE dubbelt så stor, som BAE; och på samma sätt bevisas, att EDC är dubbelt så stor, som EAC. Alltså måste hela vinkeln BDC vara dubbelt så stor, som hela vinkeln BAC, h. s. b.

3:o Det skall bevisas, att vinkeln BDC är dubbelt så stor, som BEC.

Bevis. Drag diametern AE. Enligt första beviset i denna proposition är då vinkeln ADB dubbelt så stor, som AEB; och enligt samma bevis måste även vinkeln ADC vara dubbelt så stor, som AEC. Om man då tager ADC från ADB, så blir återstoden BDC dubbelt så stor, som återstoden BEC, då man tager AEC från AEB; h. s. b.

XXI Proposition* Theorem.

De vinklar, som stå i samma cirkelsegment, äro lika stora.

l:o Det skall bevisas, att vinkeln BÅD = BED.

Tredje Boken.

03

Bevis. Om man från medelpunkten F drager FB och FD; så äro vinklarna BÅD och BED halfparten af B FD, a, alltså äro a. 20 prop. 8. de äfven sinsimellan lika stora, b; V T axiom. h, s. b.

2:o Om cirkelsegmentet är mindre, än half-cirkeln, såsom segmentet BAE; så skall det bevisas, att vinkeln BAE=BHE.

" Bevis. Drag räta lineen AH. Uti trianglarna BAK och EHK är vinkeln ABH = AEH, enligt nästföregående bevis, emedan de stå uti samma cirkelsegment ABDEH, som är större än half-cirkeln. Uti samma båda trianglar är vinkeln A KB = EKH, a; derföre måste den tredje vinkeln BAK, a. 15 prop. 1. d. v. s. BAE, vara lika stor .med b- 32 Pr°P- l den tredje vinkeln KHE, d. v. s. med BHE, b; h. s. b.

Proposition, Theorem.

Uti fyrsidiga Jigurer^ hvilkas vinklar stå uti en cirkels peripheri, äro de vinklar, som stå midtemot hvarandra, tillhopatagna lika stora med tvänne räta.

Det skall bevisas, att vinklarna BA3£+BCT> =: 2:ne räta vinklar; och att vinklarna ABC + ADC = 2:ne räta vinklar.

92

Tredje Boken.

lar äro lika stora, så måste BDE rara dubbelt så stor, som BAB, h. s. b.

2:o Det skall bevisas, att BDC är dubbelt så stor som BAC.

Bevis. Drag diametern AE. Enligt föregående bevis är då vinkeln BDE dubbelt så stor, som BAE; och på samma sätt bevisas, att EDC är dubbelt så stor, som EAC. Alltså måste hela vinkeln BDC vara dubbelt så stor, som hela vinkeln BAC, h. s. b.

3:o Det skall bevisas, att vinkeln BDC är dubbelt så stor, som BEC.

Bevis. Drag diametern AE. Enligt första beviset i denna proposition är då vinkeln ADB dubbelt så stor, som AEB; och enligt samma bevis måste även vinkeln ADC vara dubbelt så stor, som AEC. Om man då tager ADC från ADB, så blir återstoden BDC dubbelt så stor, som återstoden BEC, då man tager AEC från AEB; h. s. b.

XXI Proposition* Theorem.

De vinklar, som stå i samma cirkelsegment, äro lika stora.

l:o Det skall bevisas, att vinkeln BÅD = BED.

Tredje Boken.

03

Bevis. Om man från medelpunkten F drager FB och FD; så äro vinklarna BÅD och BED halfparten af B FD, a, alltså äro a. 20 prop. 8. de äfven sinsimellan lika stora, b; V T axiom. h, s. b.

2:o Om cirkelsegmentet är mindre, än half-cirkeln, såsom segmentet BAE; så skall det bevisas, att vinkeln BAE=BHE.

" Bevis. Drag räta lineen AH. Uti trianglarna BAK och EHK är vinkeln ABH = AEH, enligt nästföregående

bevis, emedan de stå uti samma cirkelsegment ABDEH, som är större än half-cirkeln. Uti samma båda trianglar är vinkeln A KB = EKH, a; derföre måste den tredje vinkeln BAK, a. 15 prop. 1. d. v. s. BAE, vara lika stor .med b- 32 Pr°P- l den tredje vinkeln KHE, d. v. s. med BHE, b; h. s. b.

Proposition, Theorem.

Uti fyrsidiga Jigurer^ hvilkas vinklar stå uti en cirkels peripheri, äro de vinklar, som stå midtemot hvarandra, tillhopatagna lika stora med tvänne räta.

Det skall bevisas, att vinklarna BA3£+BCT> =: 2:ne räta vinklar; och att vinklarna ABC + ADC = 2:ne räta vinklar.

a. 21 prop. 3.

b. 2 axiom. c l axiom

Bevis,, Drag räta lineerna AC och BD.

Uti segmentet BADC är vinkeln BAC zz BDC, a; och uti segmentet DABC är vinkeln CAD = CBD, a; derfö-re måste vinklarne BA£ + CAD = BDC + CBD . . , b. d.T. §. att vinkeln

____ BAD- BDC + CBD; så att, om vinkeln BCD lägges till på båda ställen, blifva vinklarna BÅD + BCD = BDC 4 CBD -f BCD c; men nu äro BDC + CBD -f BC'D= 2:ne räta . . d, derföre måste äfven vinklarne .... BÅD -f BCD = 2:ne räta vinkl. h. s.b.

På samma sätt bevises, att vinklarne

ABC + ADC = 2:ne räta vinkl, h. s. b.

XXIII Proposition. Theorem.

Tvänne likformiga och olika stora cirkelsegment kunna icke hafva samma bas, och stå på samma sida om honom.

Bevis. Ty om cirkelsegmentet ACB vore likformigt med cirkelsegmentet ADB; så skulle vinkeln ACB = ADB, a;

a. L l defin. 3. hvilket är omöjligt, att nämligen

b. 16 prop. 1. Jen yttre vinkeln vore lika stor med den, som står emot honom inuti triangeln

BCD, b. Alltså kan ej segmentet ACB vara likformigt med segmentet ADB; h. s. b.

XXIV Proposition» Theorem*

Likformiga cirkelsegment, som stå på lika stora baser, äro lika stora.

Om AB = CD och cirkelsegmenten AEB och CFD äro likformiga, så skall det bevisas, att segmentet AEB -CFD.

Bevis. Om man lägger segmentet

______ _ AEB på CFD; så

u c A B att baserna AB och

CD till alla delar träffa in med hvarandra, så kan ej segmentet AEB falla såsom CGD; emedan då en cirkelperipheri skulle skära en annan cirkelperipheri i flera än .tvänne punkter, a. Icke heller kan det ena segmentet fal- a. 10 prop* 3. la helt och hållet inom det andra; b- 23 prop. S. ty då skulle 2:ne olika stora, men c' 8 axiom-likformiga cirkelsegment kunna hafva samma bas, b. Således måste segmenten till alla delar träffa in på hvarandra, hvarföre de äro lika stora, c; h. s b.

G

Proposition.

Problem.

de n cirkel,

Att Jinna medelpunkten till hvaraf ett segment är gifvet.

Drag tvänne cordor AB och BD uti segmentet , skär dem midtitu genom de mot dem vin- a. 21 prop. 3.

b. 2 axiom. c l axiom

Bevis,, Drag räta lineerna AC och BD.

Uti segmentet BADC är vinkeln BAC zz BDC, a; och uti segmentet DABC är vinkeln CAD = CBD, a; derfö-re måste vinklarne BA£ + CAD = BDC + CBD . . , b. d.T. §. att vinkeln

____ BAD- BDC + CBD; så att, om vinkeln BCD lägges till på båda ställen, blifva vinklarna BÅD + BCD = BDC 4 CBD -f BCD c; men nu äro BDC + CBD -f BC'D= 2:ne räta . . d, derföre måste äfven vinklarne .... BÅD -f BCD = 2:ne räta vinkl. h. s.b.

På samma sätt bevises, att vinklarne

ABC + ADC = 2:ne räta vinkl, h. s. b.

XXIII Proposition. Theorem.

Tvänne likformiga och olika stora cirkelsegment kunna icke hafva samma bas, och stå på samma sida om honom.

Bevis. Ty om cirkelsegmentet ACB vore likformigt med cirkelsegmentet ADB; så skulle vinkeln ACB = ADB, a;

a. L l defin. 3. hvilket är omöjligt, att nämligen

b. 16 prop. 1. Jen yttre vinkeln vore lika stor med den, som står emot honom inuti triangeln

BCD, b. Alltså kan ej segmentet ACB vara likformigt med segmentet ADB; h. s. b.

XXIV Proposition» Theorem*

Likformiga cirkelsegment, som stå på lika stora baser, äro lika stora.

Om AB = CD och cirkelsegmenten AEB och CFD äro likformiga, så skall det bevisas, att segmentet AEB -CFD.

Bevis. Om man lägger segmentet

______ _ AEB på CFD; så

u c A B att baserna AB och

CD till alla delar träffa in med hvarandra, så kan ej segmentet AEB falla såsom CGD; emedan då en cirkelperipheri skulle skära en annan cirkelperipheri i flera än .tvänne punkter, a. Icke heller kan det ena segmentet fal- a. 10 prop* 3. la helt och hållet inom det andra; b- 23 prop. S. ty då skulle 2:ne olika stora, men c' 8 axiom-likformiga cirkelsegment kunna hafva samma bas, b. Således måste segmenten till alla delar träffa in på hvarandra, hvarföre de äro lika stora, c; h. s b.

G

Proposition.

Problem.

de n cirkel,

Att Jinna medelpunkten till hvaraf ett segment är gifvet.

Drag tvänne cordor AB och BD uti segmentet , skär dem midtitu genom de mot dem vin- a. 21 prop. 3.

b. 2 axiom. c l axiom

Bevis,, Drag räta lineerna AC och BD.

Uti segmentet BADC är vinkeln BAC zz BDC, a; och uti segmentet DABC är vinkeln CAD = CBD, a; derfö-re måste vinklarne BA£ + CAD = BDC + CBD . . , b. d.T. §. att vinkeln

____ BAD- BDC + CBD; så att, om vinkeln BCD lägges till på båda ställen, blifva vinklarna BÅD + BCD = BDC 4 CBD -f BCD c; men nu äro BDC + CBD -f BC'D= 2:ne räta . . d, derföre måste äfven vinklarne .... BÅD -f BCD = 2:ne räta vinkl. h. s.b.

På samma sätt bevises, att vinklarne

ABC + ADC = 2:ne räta vinkl, h. s. b.

XXIII Proposition. Theorem.

Tvänne likformiga och olika stora cirkelsegment kunna icke hafva samma bas, och stå på samma sida om honom.

Bevis. Ty om cirkelsegmentet ACB vore likformigt med cirkelsegmentet ADB; så skulle vinkeln ACB = ADB, a;

a. L l defin. 3. hvilket är omöjligt, att nämligen

b. 16 prop. 1. Jen yttre vinkeln vore lika stor med den, som står emot honom inuti triangeln

BCD, b. Alltså kan ej segmentet ACB vara likformigt med segmentet ADB; h. s. b.

XXIV Proposition» Theorem*

Likformiga cirkelsegment, som stå på lika stora baser, äro lika stora.

Om AB = CD och cirkelsegmenten AEB och CFD äro likformiga, så skall det bevisas, att segmentet AEB -CFD.

Bevis. Om man lägger segmentet

______ _ AEB på CFD; så

u c A B att baserna AB och

CD till alla delar träffa in med hvarandra, så kan ej segmentet AEB falla såsom CGD; emedan då en cirkelperipheri skulle skära en annan cirkelperipheri i flera än .tvänne punkter, a. Icke heller kan det ena segmentet fal- a. 10 prop* 3. la helt och hållet inom det andra; b- 23 prop. S. ty då skulle 2:ne olika stora, men c' 8 axiom-likformiga cirkelsegment kunna hafva samma bas, b. Således måste segmenten till alla delar träffa in på hvarandra, hvarföre de äro lika stora, c; h. s b.

G

Proposition.

Problem.

de n cirkel,

Att Jinna medelpunkten till hvaraf ett segment är gifvet.

Drag tvänne cordor AB och BD uti segmentet , skär dem midtitu genom de mot dem vin- a. 21 prop. 3.

b. 2 axiom. c l axiom

Bevis,, Drag räta lineerna AC och BD.

Uti segmentet BADC är vinkeln BAC zz BDC, a; och uti segmentet DABC är vinkeln CAD = CBD, a; derfö-re måste vinklarne BA£ + CAD = BDC + CBD . . , b. d.T. §. att vinkeln

____ BAD- BDC + CBD; så att, om vinkeln BCD lägges till på båda ställen, blifva vinklarna BÅD + BCD = BDC 4 CBD -f BCD c; men nu äro BDC + CBD -f BC'D= 2:ne räta . . d, derföre måste äfven vinklarne .... BÅD -f BCD = 2:ne räta vinkl. h. s.b.

På samma sätt bevises, att vinklarne

ABC + ADC = 2:ne räta vinkl, h. s. b.

XXIII Proposition. Theorem.

Tvänne likformiga och olika stora cirkelsegment kunna icke hafva samma bas, och stå på samma sida om honom.

Bevis. Ty om cirkelsegmentet ACB vore likformigt med cirkelsegmentet ADB; så skulle vinkeln ACB = ADB, a;

a. L l defin. 3. hvilket är omöjligt, att nämligen

b. 16 prop. 1. Jen yttre vinkeln vore lika stor med den, som står emot honom inuti triangeln

BCD, b. Alltså kan ej segmentet ACB vara likformigt med segmentet ADB; h. s. b.

XXIV Proposition» Theorem*

Likformiga cirkelsegment, som stå på lika stora baser, äro lika stora.

Om AB = CD och cirkelsegmenten AEB och CFD äro likformiga, så skall det bevisas, att segmentet AEB -CFD.

Bevis. Om man lägger segmentet

______ _ AEB på CFD; så

u c A B att baserna AB och

CD till alla delar träffa in med hvarandra, så kan ej segmentet AEB falla såsom CGD; emedan då en cirkelperipheri skulle skära en annan cirkelperipheri i flera än .tvänne punkter, a. Icke heller kan det ena segmentet fal- a. 10 prop* 3. la helt och hållet inom det andra; b- 23 prop. S. ty då skulle 2:ne olika stora, men c' 8 axiom-likformiga cirkelsegment kunna hafva samma bas, b. Således måste segmenten till alla delar träffa in på hvarandra, hvarföre de äro lika stora, c; h. s b.

G

Proposition.

Problem.

de n cirkel,

Att Jinna medelpunkten till hvaraf ett segment är gifvet.

Drag tvänne cordor AB och BD uti segmentet , skär dem midtitu genom de mot dem vin-96

kelräta lineerna EF och EG, a; så skall det be-

a. 10 och 11 prop. 1. visas, att deras afskämings-

b. Coroll. l prop. S. punkt E är den sökta me_

delpunkten.

B

v

E

D

Bevis. Emedan EF skär cordan AB midtitu och är vinkelrät emot henne; så måste cirkelns medelpunkt vara på EF, b.

På samma sätt bevises, att denna medelpunkt måste vara på EG; alltså måste han vara punkten E; h. s. b.

Proposition* Theorem*

Uti lika stora cirklar stå de vinklar , som äro lika stora, på lika stora bågar, antingen båda vinklarna stå vid medelpunkten, eller bä->da vid peripherien.

Låt cirkeln A BKC = DELF, och vinkeln BGC, vid medelpunkten , vara lika stor med EHF, vid den andra cirkelns medelpunkt, så måste äfven vinkeln BAC = EDF, a; och det skall bevisas, att bågen BKC = ELF.

Bevis. Drag räta lineerna BC och EF.

Emedan cirklarne ABC = DEF; så måste radierna GB, GC, HE, HF alla vara lika sto-

*

i

ra, b; och då, enligt hypothésen, ». 2J) prop. &, mellanliggande vinkeln G = H; så b- l ^efin. S.

måste basen BC = EF, c. Efter $. * Pr°P' J-. , ,. . ^ o ... i i ' d. 24 prop. 3. vinkeln A = D; sa äro cirkelseg- r *

menten BAG och EDF likformiga och stå på lika stora baser; derföre äro dessa segment lika stora, d. Nu är hela cirkeln lika stor med hela cirkeln; alltså måste det återstående segmentet BKC vara lika stort med det återstående segmentet ELF, och bågen BKC = ELF, h. s. b.

HL DL VII Proposition. Theorem.

De vinklar, som stå på lika stora bågar, uti lika stora cirklar, äro lika stora; antingen de båda stå vid medelpunkten, eller båda vid peripherien.

Om cirkeln ABC = DEF och bågen BC = EF; så skall det bevisas, att vinkeln BGC = EHF, och att vinkeln BAG = EDF.

Bevis. Vinkeln BGC kan ej vara större, än EHF v Ty om det vore möjligt, så låt vinkeln BGK = EHF. Då skulle bågen BK = EF, a; men EF är antagen vara lika stor med a. 26 prop. 8. BC, således skulle bågen BK = b- 20 prop- 3. BC, hvilket är omöjligt. Alltså kan ej vinkeln BGC>H; och på samma sätt bevises, att icke vinkeln BGC < EHF; således Imåste BGC

kelräta lineerna EF och EG, a; så skall det be-

a. 10 och 11 prop. 1. visas, att deras afskämings-

b. Coroll. l prop. S. punkt E är den sökta me_

delpunkten.

B

v

E

D

Bevis. Emedan EF skär cordan AB midtitu och är vinkelrät emot henne; så måste cirkelns medelpunkt vara på EF, b.

På samma sätt bevises, att denna medelpunkt måste vara på EG; alltså måste han vara punkten E; h. s. b.

Proposition* Theorem*

Uti lika stora cirklar stå de vinklar , som äro lika stora, på lika stora bågar, antingen båda vinklarna stå vid medelpunkten, eller bä->da vid peripherien.

Låt cirkeln A BKC = DELF, och vinkeln BGC, vid medelpunkten , vara lika stor med EHF, vid den andra cirkelns medelpunkt, så måste äfven vinkeln BAC = EDF, a; och det skall bevisas, att bågen BKC = ELF.

Bevis. Drag räta lineerna BC och EF.

Emedan cirklarne ABC = DEF; så måste radierna GB, GC, HE, HF alla vara lika sto-

*

i

ra, b; och då, enligt hypothésen, ». 2J) prop. &, mellanliggande vinkeln G = H; så b- l ^efin. S.

måste basen BC = EF, c. Efter $. * Pr°P' J-. , ,. . ^ o ... i i ' d. 24 prop. 3. vinkeln A = D; sa äro cirkelseg- r *

menten BAG och EDF likformiga och stå på lika stora baser; derföre äro dessa segment lika stora, d. Nu är hela cirkeln lika stor med hela cirkeln; alltså måste det återstående segmentet BKC vara lika stort med det återstående segmentet ELF, och bågen BKC = ELF, h. s. b.

HL DL VII Proposition. Theorem.

De vinklar, som stå på lika stora bågar, uti lika stora cirklar, äro lika stora; antingen de båda stå vid medelpunkten, eller båda vid peripherien.

Om cirkeln ABC = DEF och bågen BC = EF; så skall det bevisas, att vinkeln BGC = EHF, och att vinkeln BAG = EDF.

Bevis. Vinkeln BGC kan ej vara större, än EHF v Ty om det vore möjligt, så låt vinkeln BGK = EHF. Då skulle bågen BK = EF, a; men EF är antagen vara lika stor med a. 26 prop. 8. BC, således skulle bågen BK = b- 20 prop- 3. BC, hvilket är omöjligt. Alltså kan ej vinkeln BGC>H; och på samma sätt bevises, att icke vinkeln BGC < EHF; således Imåste BGC

kelräta lineerna EF och EG, a; så skall det be-

a. 10 och 11 prop. 1. visas, att deras afskämings-

b. Coroll. l prop. S. punkt E är den sökta me_

delpunkten.

B

v

E

D

Bevis. Emedan EF skär cordan AB midtitu och är vinkelrät emot henne; så måste cirkelns medelpunkt vara på EF, b.

På samma sätt bevises, att denna medelpunkt måste vara på EG; alltså måste han vara punkten E; h. s. b.

Proposition* Theorem*

Uti lika stora cirklar stå de vinklar , som äro lika stora, på lika stora bågar, antingen båda vinklarna stå vid medelpunkten, eller bä->da vid peripherien.

Låt cirkeln A BKC = DELF, och vinkeln BGC, vid medelpunkten , vara lika stor med EHF, vid den andra cirkelns medelpunkt, så måste äfven vinkeln BAC = EDF, a; och det skall bevisas, att bågen BKC = ELF.

Bevis. Drag räta lineerna BC och EF.

Emedan cirklarne ABC = DEF; så måste radierna GB, GC, HE, HF alla vara lika sto-

*

i

ra, b; och då, enligt hypothésen, ». 2J) prop. &, mellanliggande vinkeln G = H; så b- l ^efin. S.

måste basen BC = EF, c. Efter $. * Pr°P' J-. , ,. . ^ o ... i i ' d. 24 prop. 3. vinkeln A = D; sa äro cirkelseg- r *

menten BAG och EDF likformiga och stå på lika stora baser; derföre äro dessa segment lika stora, d. Nu är hela cirkeln lika stor med hela cirkeln; alltså måste det återstående segmentet BKC vara lika stort med det återstående segmentet ELF, och bågen BKC = ELF, h. s. b.

HL DL VII Proposition. Theorem.

De vinklar, som stå på lika stora bågar, uti lika stora cirklar, äro lika stora; antingen de båda stå vid medelpunkten, eller båda vid peripherien.

Om cirkeln ABC = DEF och bågen BC = EF; så skall det bevisas, att vinkeln BGC = EHF, och att vinkeln BAG = EDF.

Bevis. Vinkeln BGC kan ej vara större, än EHF v Ty om det vore möjligt, så låt vinkeln BGK = EHF. Då skulle bågen BK = EF, a; men EF är antagen vara lika stor med a. 26 prop. 8. BC, således skulle bågen BK = b- 20 prop- 3. BC, hvilket är omöjligt. Alltså kan ej vinkeln BGC>H; och på samma sätt bevises, att icke vinkeln BGC < EHF; således Imåste BGC

= EHF, och till följe deraf äfven deras halfparter, BAC = EDF, b. h. s. b.

XXWMI Proposition. Theorem.

Uti lika stora cirklar, upptaga lika stora cordor lika stora bågar y den större med den större, och den mindre med den mindre.

Om cirkeln ABC = DEF, och cordan BC = EF; så skall det bevisas, att bagen BGC = EHF, och att bågenr BAC = EDF.

Bevis. Drag radierna KB, KC, LE, LP, hvilka alla blifva lika stora', emedan cirklarne äro antagne vara lika stora, a. Då nu äfven

a. l defin. 3. cordan BC = EF; så måste vinkeln

b. 8 prop. 1. K = L, b; samt till följe deraf bå-

c. 26 prop. 3. gen BGC = EHp c Men hela

peripherien ABGC är lika stor med hela peripherien DEHF; derföre måste den återstående bågen BAC = EDF; h. s. b.

Corollarium. Lika stora cordor, uti samma cirkel, upptaga lika stora bågar.

XXIX Proposition. Theorem*

Lika stora bågar, af lika stora cirklar, upptaga lika stora cordor.

Om cirkeln ABC = DEF, och bågen BGC = EHF; så skall det bevisas, att cordan BC=EF.

Bevis. Drag radierna KB, KC, LE, LF, hvilka alla måste vara lika stora, emedan cirklarne äro lika; och då äfven mellanliggande vinkeln K = L, efter de stå på lika stora bågar, a; så måste basen BC == a» 27 Pr°P> 8. basen EF, b; h. s, b. b- 4 Pr°P- *.

XXX Proposition. Problem*

Att skära en gijfaen cirkelBåge ADB

midtitu. /"/

' ^ ' IL

tA

Drag cordan AB, skar henne midtitu genom vinkelräta lineen CD, a; så skall det bevisas, att bågen AD = BD.

Bevis. Drag cordor na AD och BD.

7 ' X * Då äro två sidor, DC och

Ä c B CA, uti triangeln ADC, lika stora med hvar sin sida, CD och a. 10 o. 11 prop. 1. CB, uti triangeln BDC; och b- * PTP- *.

mellanliggande vinklarne vid c' Cor.tiUMpnip.*. C äro räta; derföre måste cordan AD = BD, b; och till följe deraf bågen AD = BD, c; h. s. b.

= EHF, och till följe deraf äfven deras halfparter, BAC = EDF, b. h. s. b.

XXWMI Proposition. Theorem.

Uti lika stora cirklar, upptaga lika stora cordor lika stora bågar y den större med den större, och den mindre med den mindre.

Om cirkeln ABC = DEF, och cordan BC = EF; så skall det bevisas, att bagen BGC = EHF, och att bågenr BAC = EDF.

Bevis. Drag radierna KB, KC, LE, LP, hvilka alla blifva lika stora', emedan cirklarne äro antagne vara lika stora, a. Då nu äfven

a. l defin. 3. cordan BC = EF; så måste vinkeln

b. 8 prop. 1. K = L, b; samt till följe deraf bå-

c. 26 prop. 3. gen BGC = EHp c Men hela

peripherien ABGC är lika stor med hela peripherien DEHF; derföre måste den återstående bågen BAC = EDF; h. s. b.

Corollarium. Lika stora cordor, uti samma cirkel, upptaga lika stora bågar.

XXIX Proposition. Theorem*

Lika stora bågar, af lika stora cirklar, upptaga lika stora cordor.

Om cirkeln ABC = DEF, och bågen BGC = EHF; så skall det bevisas, att cordan BC=EF.

Bevis. Drag radierna KB, KC, LE, LF, hvilka alla måste vara lika stora, emedan cirklarne äro lika; och då äfven mellanliggande vinkeln K = L, efter de stå på lika stora bågar, a; så måste basen BC == a» 27 Pr°P> 8. basen EF, b; h. s, b. b- 4 Pr°P- *.

XXX Proposition. Problem*

Att skära en gijfaen cirkelBåge ADB

midtitu. /"/

' ^ ' IL

tA

Drag cordan AB, skar henne midtitu genom vinkelräta lineen CD, a; så skall det bevisas, att bågen AD = BD.

Bevis. Drag cordor na AD och BD.

7 ' X * Då äro två sidor, DC och

Ä c B CA, uti triangeln ADC, lika stora med hvar sin sida, CD och a. 10 o. 11 prop. 1. CB, uti triangeln BDC; och b- * PTP- *.

mellanliggande vinklarne vid c' Cor.tiUMpnip.*. C äro räta; derföre måste cordan AD = BD, b; och till följe deraf bågen AD = BD, c; h. s. b.

= EHF, och till följe deraf äfven deras halfparter, BAC = EDF, b. h. s. b.

XXWMI Proposition. Theorem.

Uti lika stora cirklar, upptaga lika stora cordor lika stora bågar y den större med den större, och den mindre med den mindre.

Om cirkeln ABC = DEF, och cordan BC = EF; så skall det bevisas, att bagen BGC = EHF, och att bågenr BAC = EDF.

Bevis. Drag radierna KB, KC, LE, LP, hvilka alla blifva lika stora', emedan cirklarne äro antagne vara lika stora, a. Då nu äfven

a. l defin. 3. cordan BC = EF; så måste vinkeln

b. 8 prop. 1. K = L, b; samt till följe deraf bå-

c. 26 prop. 3. gen BGC = EHp c Men hela

peripherien ABGC är lika stor med hela peripherien DEHF; derföre måste den återstående bågen BAC = EDF; h. s. b.

Corollarium. Lika stora cordor, uti samma cirkel, upptaga lika stora bågar.

XXIX Proposition. Theorem*

Lika stora bågar, af lika stora cirklar, upptaga lika stora cordor.

Tredje BokenL

99

Om cirkeln ABC = DEF, och bågen BGC = EHF; så skall det bevisas, att cordan BC=EF.

Bevis. Drag radierna KB, KC, LE, LF, hvilka alla måste vara lika stora, emedan cirklarne äro lika; och då äfven mellanliggande vinkeln K = L, efter de stå på lika stora bågar, a; så måste basen BC == a» 27 Pr°P> 8. basen EF, b; h. s, b. b- 4 Pr°P- *.

XXX Proposition. Problem*

Att skära en gijfaen cirkelBåge ADB

midtitu. /"/

' ^ ' IL

tA

Drag cordan AB, skar henne midtitu genom vinkelräta lineen CD, a; så skall det bevisas, att bågen AD = BD.

Bevis. Drag cordor na AD och BD.

7 ' X * Då äro två sidor, DC och

Ä c B CA, uti triangeln ADC, lika stora med hvar sin sida, CD och a. 10 o. 11 prop. 1. CB, uti triangeln BDC; och b- * PTP- *.

mellanliggande vinklarne vid c' Cor.tiUMpnip.*. C äro räta; derföre måste cordan AD = BD, b; och till följe deraf bågen AD = BD, c; h. s. b.

t 98

Tredje Boken.

= EHF, och till följe deraf äfven deras halfparter, BAC = EDF, b. h. s. b.

XXWMI Proposition. Theorem.

Uti lika stora cirklar, upptaga lika stora cordor lika stora bågar y den större med den större, och den mindre med den mindre.

Om cirkeln ABC = DEF, och cordan BC = EF; så skall det bevisas, att bagen BGC = EHF, och att bågenr BAC = EDF.

Bevis. Drag radierna KB, KC, LE, LP, hvilka alla blifva lika stora', emedan cirklarne äro antagne vara lika stora, a. Då nu äfven

a. l defin. 3. cordan BC = EF; så måste vinkeln

b. 8 prop. 1. K = L, b; samt till följe deraf bå-

c. 26 prop. 3. gen BGC = EHp c Men hela

peripherien ABGC är lika stor med hela peripherien DEHF; derföre måste den återstående bågen BAC = EDF; h. s. b.

Corollarium. Lika stora cordor, uti samma cirkel, upptaga lika stora bågar.

XXIX Proposition. Theorem*

Lika stora bågar, af lika stora cirklar, upptaga lika stora cordor.

Om cirkeln ABC = DEF, och bågen BGC = EHF; så skall det bevisas, att cordan BC=EF.

Bevis. Drag radierna KB, KC, LE, LF, hvilka alla måste vara lika stora, emedan cirklarne äro lika; och då äfven mellanliggande vinkeln K = L, efter de stå på lika stora bågar, a; så måste basen BC == a» 27 Pr°P> 8. basen EF, b; h. s, b. b- 4 Pr°P- *.

XXX Proposition. Problem*

Att skära en gijfaen cirkelBåge ADB

midtitu. /"/

' ^ ' IL

tA

Drag cordan AB, skar henne midtitu genom vinkelräta lineen CD, a; så skall det bevisas, att bågen AD = BD.

Bevis. Drag cordor na AD och BD.

7 ' X * Då äro två sidor, DC och

Ä c B CA, uti triangeln ADC, lika stora med hvar sin sida, CD och a. 10 o. 11 prop. 1. CB, uti triangeln BDC; och b- * PTP- *.

mellanliggande vinklarne vid c' Cor.tiUMpnip.*. C äro räta; derföre måste cordan AD = BD, b; och till följe deraf bågen AD = BD, c; h. s. b.

5LXXI Proposition. Theorem.

l:o Den vinkeln, som står uti halfcirktln är en rät vinkel.

2:o Den vinkeln, som står uti ett segment, som är större lin half cirkeln, är mindre än en rät vinkel.

3;o Den vinkeln, som står uti ett segment, som är mindre, än halfcirkeln, är större än en rät vinkel.

4:o Det större segmentets vinkel är större än en rät, och det mindre segmentets vin-kel är mindre än en räf.

l:o Låt ABGC vara en cirkel, BC en af

hans diametrar, och E hans medelpunkt, samt

cordorna BÄ och CA skära hvarandra på peri-

,pherien; så skall det bevisas, att vinkeln BAC är

en rät vinkel.

Bevis. Drag AE och drag ut BÄ åt P.

Emedan EB=EA = EC så är vinkeln

EAB=EBA

och vinkeln . . EAC=ECA,a; och således vinkl. BAB +EAC = EBA + ECA, b. d. v. s......

J

Men uti triangeln ABC är den yt- a. 5 prop. 1. tre vinkeln CAF=CBA 4BCA, c; b 2 axiom.

således måste C AF = BAC, d. c, Sf p^pm1'

AIU ° .. - i i r>*r» -M . "' l axiom-

Alltså ar vinkeln BAL/ en rät vin- e< J-Q defin. 1.

kel, e; h. s. b. f. 21 prop. 3.

g. 22 prop. 3.

2:o Det skall bevisas, att vinkeln AGC är mindre än en rät vinkel.

Bevis. Vinkeln AGC = ABC, f; men emedan BAC är en rät; så måste ABC vara mindre än en rät, c; och således äfven AGC mindre än en fät; h. s. b*

3:o Det skall bevisas, att vinkeln ADC är större än en rät vinkel.

Bevis. Vinkfarne ADC -f AGC = 2:ne räta, g; men AGC är mindre än en rät; derföre måste ADC vara större än en rät vinkel, h. g. b.

4:o Det skall bevisas, att vinkeln, som formeras af räta lineen AC och båg^n AB, är större än en rät vinkel, och att vinkeln, som formeras af räta lineen AC och bågen ADC, är mindre an en rät vinkel.

Bevis. Ty den förra vinkeln är större än BAC, och den sednare är mindre än GAF, hvilka båda vinklar äro förut bevista vara räta.

Proposition. Theorem;

Om, en rät linea tangerar en cirkel, 045* en annan rät linea, genom tangeringspurikten, 100

5LXXI Proposition. Theorem.

l:o Den vinkeln, som står uti halfcirktln är en rät vinkel.

2:o Den vinkeln, som står uti ett segment, som är större lin half cirkeln, är mindre än en rät vinkel.

3;o Den vinkeln, som står uti ett segment, som är mindre, än halfcirkeln, är större än en rät vinkel.

4:o Det större segmentets vinkel är större än en rät, och det mindre segmentets vin-kel är mindre än en räf.

l:o Låt ABGC vara en cirkel, BC en af

hans diametrar, och E hans medelpunkt, samt

cordorna BÄ och CA skära hvarandra på peri-

,pherien; så skall det bevisas, att vinkeln BAC är

en rät vinkel.

Bevis. Drag AE och drag ut BÄ åt P.

Emedan EB=EA = EC så är vinkeln

EAB=EBA

och vinkeln . . EAC=ECA,a; och således vinkl. BAB +EAC = EBA + ECA, b. d. v. s......

J

Men uti triangeln ABC är den yt- a. 5 prop. 1. tre vinkeln CAF=CBA 4BCA, c; b 2 axiom.

således måste C AF = BAC, d. c, Sf p^pm1'

AIU ° .. - i i r>*r» -M . "' l axiom-

Alltså ar vinkeln BAL/ en rät vin- e< J-Q defin. 1.

kel, e; h. s. b. f. 21 prop. 3.

g. 22 prop. 3.

2:o Det skall bevisas, att vinkeln AGC är mindre än en rät vinkel.

Bevis. Vinkeln AGC = ABC, f; men emedan BAC är en rät; så måste ABC vara mindre än en rät, c; och således äfven AGC mindre än en fät; h. s. b*

3:o Det skall bevisas, att vinkeln ADC är större än en rät vinkel.

Bevis. Vinkfarne ADC -f AGC = 2:ne räta, g; men AGC är mindre än en rät; derföre måste ADC vara större än en rät vinkel, h. g. b.

4:o Det skall bevisas, att vinkeln, som formeras af räta lineen AC och båg^n AB, är större än en rät vinkel, och att vinkeln, som formeras af räta lineen AC och bågen ADC, är mindre an en rät vinkel.

Bevis. Ty den förra vinkeln är större än BAC, och den sednare är mindre än GAF, hvilka båda vinklar äro förut bevista vara räta.

Proposition. Theorem;

Om, en rät linea tangerar en cirkel, 045* en annan rät linea, genom tangeringspurikten,

skär samma cirkel; så skall hvardera vinkeln, som den skärande lineen gör med tangenten, vara lika stor med den vinkeln, som står i segmentet på andra sidan den skärande lineen.

Om TÉ tangerar cirkeln ADB uti punkten B; så skall det bevisas, att vinkeln IDB = IBE, och att vinkeln IFB = IBT.

Bevis. Drag BÄ, vinkelrät mot TÉ, och cordan AI. Då måste medelpunkten vara på .. a. 19 prop. 3. BÄ, a, och således

b. SI prop. 3. segmentet AIB va-

c. »OOP.-au ra en haifcirkel

32 P'0*1' samt, till följe der!

d. 3 axiom. af, vinkeln AIB vara en rät vin-

e. 21 prop. 3. kel b Derföre äro, uti triangeln AIB, de återstående vinklarne I AB -f IB A =: en rät vinkel, c. Men vinkeln ABE är äfven en rät vinkel; således äro

IAB-HBA = ABE; d. v. s. . . IAB + IBA = IBA + IBE,

eller.......IAB = IBE, d.

Men nu är, ... IAB = IDB, e; derföre måste äfven.......IDB = IBE, h. s. b.

Vidare: vinklarne IDB + IPB = 2:ne räta, a;

a. 22 prop. 3. men äfven äro

b. 13 prop. 1. IBE4-IBT = 2:ne räta, b; derföre måste vinklarne

IDB + IFB = IBE + IBT;

och efter det förut är bevist, att IDB = IBE; så måste äfven IFB = IBT, h. s. b.

Proposition. Problem.

Att på en gifven rät linea, AB, upprita ett cirkelsegment, som uti sig^ innehåller en vinkel, lika stor med en gifven vinkel, C.

Gör vinkeln BAD = C, a; drag ÄG vinkelrät mot AD, b; och från midten af AB, drag FG vinkelrät mot AB, b. Då måste GA = GB, c.

Tager man således G till medelpunkt, och ritar en cirkelperipheri genom A, så måste hon äfven gå genom B; och segmentet AEB skall »" 23 prop. 1.

då uti sig innehålla en vinkel AEB *.' n Pr°P- \

__ p c. 4 prop. 1.

~~ ^' ^ d. l Cor. till

Bevis. Emedan AD är vm- 10 prop. S. kelrät mot radien ÄG; så tange- e. 32 prop. 3. rar hon cirkeln, d. Således är vinkeln BAD =2 AEB, e; men vinkeln BAD är gjord lika stor med C; derföre måste äfven^AEB = C; h, s. b.

Scholium. Om vinkeln C vore rät, behöfde man endast på AB upprita en halfcirkel; 31 prop. 3.

**VIV Proposition. Problem. ^

Att från en gifven cirkel, ABC, afskära ett segment, som uti sig innehåller en vinkel,

lika stor med en gifven vinkel, D,

skär samma cirkel; så skall hvardera vinkeln, som den skärande lineen gör med tangenten, vara lika stor med den vinkeln, som står i segmentet på andra sidan den skärande lineen.

Om TÉ tangerar cirkeln ADB uti punkten B; så skall det bevisas, att vinkeln IDB = IBE, och att vinkeln IFB = IBT.

Bevis. Drag BÄ, vinkelrät mot TÉ, och cordan AI. Då måste medelpunkten vara på .. a. 19 prop. 3. BÄ, a, och således

b. SI prop. 3. segmentet AIB va-

c. »OOP.-au ra en haifcirkel

32 P'0*1' samt, till följe der!

d. 3 axiom. af, vinkeln AIB vara en rät vin-

e. 21 prop. 3. kel b Derföre äro, uti triangeln AIB, de återstående vinklarne I AB -f IB A =: en rät vinkel, c. Men vinkeln ABE är äfven en rät vinkel; således äro

IAB-HBA = ABE; d. v. s. . . IAB + IBA = IBA + IBE,

eller.......IAB = IBE, d.

Men nu är, ... IAB = IDB, e; derföre måste äfven.......IDB = IBE, h. s. b.

Vidare: vinklarne IDB + IPB = 2:ne räta, a;

a. 22 prop. 3. men äfven äro

b. 13 prop. 1. IBE4-IBT = 2:ne räta, b; derföre måste vinklarne

IDB + IFB = IBE + IBT;

och efter det förut är bevist, att IDB = IBE; så måste äfven IFB = IBT, h. s. b.

Proposition. Problem.

Att på en gifven rät linea, AB, upprita ett cirkelsegment, som uti sig^ innehåller en vinkel, lika stor med en gifven vinkel, C.

Gör vinkeln BAD = C, a; drag ÄG vinkelrät mot AD, b; och från midten af AB, drag FG vinkelrät mot AB, b. Då måste GA = GB, c.

Tager man således G till medelpunkt, och ritar en cirkelperipheri genom A, så måste hon äfven gå genom B; och segmentet AEB skall »" 23 prop. 1.

då uti sig innehålla en vinkel AEB *.' n Pr°P- \

__ p c. 4 prop. 1.

~~ ^' ^ d. l Cor. till

Bevis. Emedan AD är vm- 10 prop. S. kelrät mot radien ÄG; så tange- e. 32 prop. 3. rar hon cirkeln, d. Således är vinkeln BAD =2 AEB, e; men vinkeln BAD är gjord lika stor med C; derföre måste äfven^AEB = C; h, s. b.

Scholium. Om vinkeln C vore rät, behöfde man endast på AB upprita en halfcirkel; 31 prop. 3.

**VIV Proposition. Problem. ^

Att från en gifven cirkel, ABC, afskära ett segment, som uti sig innehåller en vinkel,

lika stor med en gifven vinkel, D,

skär samma cirkel; så skall hvardera vinkeln, som den skärande lineen gör med tangenten, vara lika stor med den vinkeln, som står i segmentet på andra sidan den skärande lineen.

Om TÉ tangerar cirkeln ADB uti punkten B; så skall det bevisas, att vinkeln IDB = IBE, och att vinkeln IFB = IBT.

Bevis. Drag BÄ, vinkelrät mot TÉ, och cordan AI. Då måste medelpunkten vara på .. a. 19 prop. 3. BÄ, a, och således

b. SI prop. 3. segmentet AIB va-

c. »OOP.-au ra en haifcirkel

32 P'0*1' samt, till följe der!

d. 3 axiom. af, vinkeln AIB vara en rät vin-

e. 21 prop. 3. kel b Derföre äro, uti triangeln AIB, de återstående vinklarne I AB -f IB A =: en rät vinkel, c. Men vinkeln ABE är äfven en rät vinkel; således äro

IAB-HBA = ABE; d. v. s. . . IAB + IBA = IBA + IBE,

eller.......IAB = IBE, d.

Men nu är, ... IAB = IDB, e; derföre måste äfven.......IDB = IBE, h. s. b.

Vidare: vinklarne IDB + IPB = 2:ne räta, a;

a. 22 prop. 3. men äfven äro

b. 13 prop. 1. IBE4-IBT = 2:ne räta, b; derföre måste vinklarne

IDB + IFB = IBE + IBT;

och efter det förut är bevist, att IDB = IBE; så måste äfven IFB = IBT, h. s. b.

Proposition. Problem.

Att på en gifven rät linea, AB, upprita ett cirkelsegment, som uti sig^ innehåller en vinkel, lika stor med en gifven vinkel, C.

Gör vinkeln BAD = C, a; drag ÄG vinkelrät mot AD, b; och från midten af AB, drag FG vinkelrät mot AB, b. Då måste GA = GB, c.

Tager man således G till medelpunkt, och ritar en cirkelperipheri genom A, så måste hon äfven gå genom B; och segmentet AEB skall »" 23 prop. 1.

då uti sig innehålla en vinkel AEB *.' n Pr°P- \

__ p c. 4 prop. 1.

~~ ^' ^ d. l Cor. till

Bevis. Emedan AD är vm- 10 prop. S. kelrät mot radien ÄG; så tange- e. 32 prop. 3. rar hon cirkeln, d. Således är vinkeln BAD =2 AEB, e; men vinkeln BAD är gjord lika stor med C; derföre måste äfven^AEB = C; h, s. b.

Scholium. Om vinkeln C vore rät, behöfde man endast på AB upprita en halfcirkel; 31 prop. 3.

**VIV Proposition. Problem. ^

Att från en gifven cirkel, ABC, afskära ett segment, som uti sig innehåller en vinkel,

lika stor med en gifven vinkel, D,

E

B

Bevis. Drag tangenten EF, a; gör vinkeln CBF ==V, b; så måste vin-

a. 17 prop. 3. keln BAC = CBF, c; men CBF =

b. 23 prop. 1. D. s&ledes är äfven BAC- D; och

c. 32 prop. 3. BAGC är alltgå det begärdta segmentet.

XXXV Proposition. '.Theorem*

Om tvänne räta lineer Uti en cirkel skära hvarandra; så är rectängeln af den enas delar lika stor med rectangeln af den andras delar.

Det skall bevisas, att rectangeln af AE och EC är lika stor med rectaftgeln af BE och ED, eller att

AE.EQ = BE.ED.

Bevis. Drag från medelpunkten, F, rata lineerna FE, FC, samt FG vinkelrät mot AC, och FH vinkelrät jnot BD, a. a. 12 prop. 1. Då måste FG skära AC midtitu uti 1>. 3 prop. 3. G, och FH skära BD midtitu uti KP,b. °V 47 P'nP f Emedan således AC är skuren

1 IB ' uti 2:ne lika delar, ÄG och GC, och uti 2:ne olika delar, AE och EC; så måste

c.

och således AE.EC -f GE + ¥G = FG -f GC. Men nu är ^%£^=='F^ochBG

derföre måste AE.EC + FE2=FC. På samma sätt bevises, att BE.ED+ FE = FD =¥C; hvaraf följer, att . . AE.EC + FE2=: BE.ED 4 FE^ och då

_ _ g

den gemensamma qvadraten FE tages bort på båda ställen, måste alltså

AE.EC =BE,ED,, h s. b.

Om de båda räta lineerna gå genom medelpunkten, så är det klart, att rectangeln af den enas delar blifver lika stor med rectan-- __ geln af den andras delar; emedan

dessa fyra delar alla blifva lika stora med hvarandra.

Xl&llLWI Proposition. Theorem.

Om tvänne räta lineer, DA ocftDB, dragas från en punkt Dy utom en cirkel, af hvilka l)A skär, men DB tangerar cirkeln; så skall rectangeln af hela den skärande lineen, DA^ och den delen, DC, af henne, som är imellan punkten D och peripherien, vara lika stor med qvadraten på tangenten DB.

Det skall bevisas, att DA.DC =

E

B

Bevis. Drag tangenten EF, a; gör vinkeln CBF ==V, b; så måste vin-

a. 17 prop. 3. keln BAC = CBF, c; men CBF =

b. 23 prop. 1. D. s&ledes är äfven BAC- D; och

c. 32 prop. 3. BAGC är alltgå det begärdta segmentet.

XXXV Proposition. '.Theorem*

Om tvänne räta lineer Uti en cirkel skära hvarandra; så är rectängeln af den enas delar lika stor med rectangeln af den andras delar.

Det skall bevisas, att rectangeln af AE och EC är lika stor med rectaftgeln af BE och ED, eller att

AE.EQ = BE.ED.

Bevis. Drag från medelpunkten, F, rata lineerna FE, FC, samt FG vinkelrät mot AC, och FH vinkelrät jnot BD, a. a. 12 prop. 1. Då måste FG skära AC midtitu uti 1>. 3 prop. 3. G, och FH skära BD midtitu uti KP,b. °V 47 P'nP f Emedan således AC är skuren

1 IB ' uti 2:ne lika delar, ÄG och GC, och uti 2:ne olika delar, AE och EC; så måste

Tredje Boken.

105

c.

och således AE.EC -f GE + ¥G = FG -f GC. Men nu är ^%£^=='F^ochBG

derföre måste AE.EC + FE2=FC. På samma sätt bevises, att BE.ED+ FE = FD =¥C; hvaraf följer, att . . AE.EC + FE2=: BE.ED 4 FE^ och då

_ _ g

den gemensamma qvadraten FE tages bort på båda ställen, måste alltså

AE.EC =BE,ED,, h s. b.

Om de båda räta lineerna gå genom medelpunkten, så är det klart, att rectangeln af den enas delar blifver lika stor med rectan-- __ geln af den andras delar; emedan

dessa fyra delar alla blifva lika stora med hvarandra.

Xl&llLWI Proposition. Theorem.

Om tvänne räta lineer, DA ocftDB, dragas från en punkt Dy utom en cirkel, af hvilka l)A skär, men DB tangerar cirkeln; så skall rectangeln af hela den skärande lineen, DA^ och den delen, DC, af henne, som är imellan punkten D och peripherien, vara lika stor med qvadraten på tangenten DB.

Det skall bevisas, att DA.DC =

104

Tredje Boken.

E

B

Bevis. Drag tangenten EF, a; gör vinkeln CBF ==V, b; så måste vin-

a. 17 prop. 3. keln BAC = CBF, c; men CBF =

b. 23 prop. 1. D. s&ledes är äfven BAC- D; och

c. 32 prop. 3. BAGC är alltgå det begärdta segmentet.

XXXV Proposition. '.Theorem*

Om tvänne räta lineer Uti en cirkel skära hvarandra; så är rectängeln af den enas delar lika stor med rectangeln af den andras delar.

Det skall bevisas, att rectangeln af AE och EC är lika stor med rectaftgeln af BE och ED, eller att

AE.EQ = BE.ED.

Bevis. Drag från medelpunkten, F, rata lineerna FE, FC, samt FG vinkelrät mot AC, och FH vinkelrät jnot BD, a. a. 12 prop. 1. Då måste FG skära AC midtitu uti 1>. 3 prop. 3. G, och FH skära BD midtitu uti KP,b. °V 47 P'nP f Emedan således AC är skuren

1 IB ' uti 2:ne lika delar, ÄG och GC, och uti 2:ne olika delar, AE och EC; så måste

c.

och således AE.EC -f GE + ¥G = FG -f GC. Men nu är ^%£^=='F^ochBG

derföre måste AE.EC + FE2=FC. På samma sätt bevises, att BE.ED+ FE = FD =¥C; hvaraf följer, att . . AE.EC + FE2=: BE.ED 4 FE^ och då

_ _ g

den gemensamma qvadraten FE tages bort på båda ställen, måste alltså

AE.EC =BE,ED,, h s. b.

Om de båda räta lineerna gå genom medelpunkten, så är det klart, att rectangeln af den enas delar blifver lika stor med rectan-- __ geln af den andras delar; emedan

dessa fyra delar alla blifva lika stora med hvarandra.

Xl&llLWI Proposition. Theorem.

Om tvänne räta lineer, DA ocftDB, dragas från en punkt Dy utom en cirkel, af hvilka l)A skär, men DB tangerar cirkeln; så skall rectangeln af hela den skärande lineen, DA^ och den delen, DC, af henne, som är imellan punkten D och peripherien, vara lika stor med qvadraten på tangenten DB.

Det skall bevisas, att DA.DC =

Bevis. Låt först DA gå genom cirkelns medelpunkt E; drag EB.

Emedan då CA är skuren midtitu uti E, och CD är sammanfogad med henne ända rätt fram;

så måste DA.DC + CE2-DE, ... 6 prop. 2. Men emedan DB tangerar cirkeln, så måste B vara en rät vinkel, 18 prop. 3; derföre måste

DE = D^+BE24T prop. 1. och således DA.DC + CE=: DB%BE;

men.......... CE== BE

derföre måste . . DA.DC = DB, h. s. b.

Låt nu DA icke gå genom medelpunkten, E; drag DE, BE, CE samt EF vinkelrät mot AC, a.

a. 12 prop. 1. Då måste EF skära AC midt-

b. S prop. 3. itu b; och gåledes är

c. 6 prop. 2. _ 2 _ g

a. £7 prop.l. DA.DC4.CF = DF, c;

El;

--

så att, om man lägger till EF, blifver DA.DC + CF2+ EF = DF men nu är . CF% EF = Clfn Elf, d , och ..... DF%ÉF2=:DE, d; derföre måste DA.DC + BE*=: DE;

och då så måste

d;

. DA.DC* BE= DB+

eller ändteligen . D A. DC = DB* h. s. b.

XXXVII Proposition. Theorem.

Om tvänne räta lineer, DA och DB9 dragas från en punlit, D, utom en cirkel, af hvilka DA skär cirkeln , men den andra, DB, endast råkar honom uti punkten B, och om då rectangeln af hela den skärande lineen, och den delen y DC, af henne, som är imellan*punk-ten D och peripherien, är lika stor med qva~ dr äten af den lineen 3 DB, som endast råkar cirkeln; så skall denna sednare linea, DB, tangera cirkeln,

Om DA.DC = ÖB; så skall det bevisas, att DB tangerar cirkeln, . "

Bevis. Drag tangenten DE, a , och radierna FE , FB , samt räta lineen DF. Då måste vinkeln DEF vara en rät vinkel, b.

- 2

Nu är DA.DC = DE, c; och eme-

dan det ar antaget, att äfven a- W prop. S.

^ - 2 ^b. 18 prop. S.

DA.DC = DB; c. 36 prop. S.

så måste DE = DB. Då dessutom d. 8 prop. 1. FE = FB, och DF är gemensam ?- 16 Pr°P- s> 106

Tredje Boken.

Bevis. Låt först DA gå genom cirkelns medelpunkt E; drag EB.

Emedan då CA är skuren midtitu uti E, och CD är sammanfogad med henne ända rätt fram;

så måste DA.DC + CE2-DE, ... 6 prop. 2. Men emedan DB tangerar cirkeln, så måste B vara en rät vinkel, 18 prop. 3; derföre måste

DE = D^+BE24T prop. 1. och således DA.DC + CE=: DB%BE;

men.......... CE== BE

derföre måste . . DA.DC = DB, h. s. b.

Låt nu DA icke gå genom medelpunkten, E; drag DE, BE, CE samt EF vinkelrät mot AC, a.

a. 12 prop. 1. Då måste EF skära AC midt-

b. S prop. 3. itu b; och gåledes är

c. 6 prop. 2. _ 2 _ g

a. £7 prop.l. DA.DC4.CF = DF, c;

El;

--

så att, om man lägger till EF, blifver DA.DC + CF2+ EF = DF men nu är . CF% EF = Clfn Elf, d , och ..... DF%ÉF2=:DE, d; derföre måste DA.DC + BE*=: DE;

och då så måste

d;

. DA.DC* BE= DB+

eller ändteligen . D A. DC = DB* h. s. b.

XXXVII Proposition. Theorem.

Om tvänne räta lineer, DA och DB9 dragas från en punlit, D, utom en cirkel, af hvilka DA skär cirkeln , men den andra, DB, endast råkar honom uti punkten B, och om då rectangeln af hela den skärande lineen, och den delen y DC, af henne, som är imellan*punk-ten D och peripherien, är lika stor med qva~ dr äten af den lineen 3 DB, som endast råkar cirkeln; så skall denna sednare linea, DB, tangera cirkeln,

Om DA.DC = ÖB; så skall det bevisas, att DB tangerar cirkeln, . "

Bevis. Drag tangenten DE, a , och radierna FE , FB , samt räta lineen DF. Då måste vinkeln DEF vara en rät vinkel, b.

- 2

Nu är DA.DC = DE, c; och eme-

dan det ar antaget, att äfven a- W prop. S.

^ - 2 ^b. 18 prop. S.

DA.DC = DB; c. 36 prop. S.

så måste DE = DB. Då dessutom d. 8 prop. 1. FE = FB, och DF är gemensam ?- 16 Pr°P- s>108

Tredje Boken.

till båda trianglarna DBF och DEF; så måste vinkeln DBF = DEF, d; och således DBF vara en rät vinkel, samt alltså DB tangera cirkeln uti punkten B, e; h. s. b.

Corollarium. Häraf följer, att om flera räta lineer, dragna från en punkt, D, utom en cirkel9 skära honom., såsom DA, DK; sä är rectängeln af hela den ena lineen, DAy och hennes yttre del, DC, lika stor med rect-angeln af hela den andra lineen DK, och hennes yttre dely DG; emedan båda dessa rect-änglar, hvar för sig, äro lika stora med qvadraten pä tangenten DB.

§eliolier till 3:dje Boken.

1. Proposition.

1. Genom 2:ne punkter, A och B, kunna oändligt många cirkelperiphe-rier gå. Medelpunkten till alla dessa peripherier äro på den räta lineen, CD, som är vinkelrät emot räta lineen AB, och gom skär henne midtitu.

25. Proposition,

2 Bestämmer man deremot, förutan A och B, ännu en tredje punkt C, genom hvilken cir-

kelperipherierna skola gå; så måste, me-v C delpunkterna till dessa peripherier både vara på räta lineen DE, som skär AB D midtitu och är vinkel-

rät emot henne, och på räta lineen DF som skär BC midtitu och är vinkelrät emot henne; så att blott en enda sådan medelpunkt finnes, nämligen afskärningspunkten imellan DE och DF.

3. Häraf finner man, att likasom en cirkelperipheri alltid kan gå genom hvilka trenne gifna punkter, som heldst, endast de ej äro alla tre uti-en rät linea; så är en cirkel fullkomligen, både till läge och storlek bestämd, då man

blott känner 3;ne punkter, genam hvilka dess peripheri skall gå.

Problemet uti 25 Propositionen kan således construeras, som nästföregående figur utvisar, hvilket äfvenledes sker uti 4:de Bokens 5:te Proposition.

17. P r öp o s i t i o n.

4. Uti ritning Verkställes detta problem lättast derigenom, att man med den räta lineen AC, hvilken sammanbinder den .gifna punkten med den gifna cirkelns medelpunkt, såsom diameter, ritar cirkeln AFE; clå den ena tangenten bestämmes af punkterna A och B,

till båda trianglarna DBF och DEF; så måste vinkeln DBF = DEF, d; och således DBF vara en rät vinkel, samt alltså DB tangera cirkeln uti punkten B, e; h. s. b.

Corollarium. Häraf följer, att om flera räta lineer, dragna från en punkt, D, utom en cirkel9 skära honom., såsom DA, DK; sä är rectängeln af hela den ena lineen, DAy och hennes yttre del, DC, lika stor med rect-angeln af hela den andra lineen DK, och hennes yttre dely DG; emedan båda dessa rect-änglar, hvar för sig, äro lika stora med qvadraten pä tangenten DB.

§eliolier till 3:dje Boken.

1. Proposition.

1. Genom 2:ne punkter, A och B, kunna oändligt många cirkelperiphe-rier gå. Medelpunkten till alla dessa peripherier äro på den räta lineen, CD, som är vinkelrät emot räta lineen AB, och gom skär henne midtitu.

25. Proposition,

2 Bestämmer man deremot, förutan A och B, ännu en tredje punkt C, genom hvilken cir-

kelperipherierna skola gå; så måste, me-v C delpunkterna till dessa peripherier både vara på räta lineen DE, som skär AB D midtitu och är vinkel-

rät emot henne, och på räta lineen DF som skär BC midtitu och är vinkelrät emot henne; så att blott en enda sådan medelpunkt finnes, nämligen afskärningspunkten imellan DE och DF.

3. Häraf finner man, att likasom en cirkelperipheri alltid kan gå genom hvilka trenne gifna punkter, som heldst, endast de ej äro alla tre uti-en rät linea; så är en cirkel fullkomligen, både till läge och storlek bestämd, då man blott känner 3;ne punkter, genam hvilka dess peripheri skall gå.

Problemet uti 25 Propositionen kan således construeras, som nästföregående figur utvisar, hvilket äfvenledes sker uti 4:de Bokens 5:te Proposition.

17. P r öp o s i t i o n.

4. Uti ritning Verkställes detta problem lättast derigenom, att man med den räta lineen AC, hvilken sammanbinder den .gifna punkten med den gifna cirkelns medelpunkt, såsom diameter, ritar cirkeln AFE; clå den ena tangenten bestämmes af punkterna A och B,

och den andra af A och E; enligt 31 och 16 proposit. 3:dje Boken.

35 och 36 Propositionerna.

5. Dessa båda Theorem sammanfattas uti följande: Om tvänne räta lineer, som skära hvarandra, äfven skäras af en cirkelperipheri;, så är rectangeln af den enas delar lika stor med rectangeln af den andras delar, hvarje del alltid tagen från de räta lineernas afskärningspunkt till peripherien. Jämför Schol. till 2 prop. 6.

FJERDE BOKEN.

Definitioner .

1. En rätliilig figur säges vara inskrifven uti en rätlinig figur, då hvar och en af den förra figurens vinkelspetsar äro på den sednares sidor.

2. En figur säges vara om-skri f ve n omkring en figur, då hvar och en af den förres sidor gå genom hvar och en af den sednares vinkelspetsar*

3. En rätlinig figur säges vara inskrifven uti en cirkel, då hvar och en af figurens vinkelspetsar äro på cirkelns peripheri. Cirkeln säges då vara omskrifven omkring figuren.

4. En rätlinig figur säges vara omskrifven omkring en cirkel, då hvar och en af figurens sidor tangerar cirkelns peripheri. Cirkeln säges då vara inskrifven uti figuren.

5. Regulier månghörning kallas en plan rätlinig figur, uti hvilken alla sidorna äro lika stora, och alla vinklarne lika stora.

6. En rät linea säges vara passad uti en cirkel, när dess yttersta ändar äro uti cirkelns peripheri.

I Proposition. Problem*

Att uti en gifven cirkel passa en rät linea, som är lika stor med en gifven rät linea, hvilken icke är större än cirkelns diameter.

Bevis. Låt BAC vara den gifna cirkeln och D den gifna räta lineen: Tag punkten C på den gifna peripherien efter behag, gör CE = D, upprita en cirkelbåge med C till medelpunkt och CE till radie, samt drag räta

och den andra af A och E; enligt 31 och 16 proposit. 3:dje Boken.

35 och 36 Propositionerna.

5. Dessa båda Theorem sammanfattas uti följande: Om tvänne räta lineer, som skära hvarandra, äfven skäras af en cirkelperipheri;, så är rectangeln af den enas delar lika stor med rectangeln af den andras delar, hvarje del alltid tagen från de räta lineernas afskärningspunkt till peripherien. Jämför Schol. till 2 prop. 6.

FJERDE BOKEN.

Definitioner .

1. En rätliilig figur säges vara inskrifven uti en rätlinig figur, då hvar och en af den förra figurens vinkelspetsar äro på den sednares sidor.

2. En figur säges vara om-skri f ve n omkring en figur, då hvar och en af den förres sidor gå genom hvar och en af den sednares vinkelspetsar*

Fjerde Boken. 111

3. En rätlinig figur säges vara inskrifven uti en cirkel, då hvar och en af figurens vinkelspetsar äro på cirkelns peripheri. Cirkeln säges då vara omskrifven omkring figuren.

4. En rätlinig figur säges vara omskrifven omkring en cirkel, då hvar och en af figurens sidor tangerar cirkelns

peripheri. Cirkeln säges då vara inskrifven uti figuren.

5. Regulier månghörning kallas en plan rätlinig figur, uti hvilken alla sidorna äro lika stora, och alla vinklarne lika stora.

6. En rät linea säges vara passad uti en cirkel, när dess yttersta ändar äro uti cirkelns peripheri.

I Proposition. Problem*

Att uti en gifven cirkel passa en rät linea, som är lika stor med en gifven rät linea, hvilken icke är större än cirkelns diameter.

Bevis. Låt BAC vara den gifna cirkeln och D den gifna räta lineen: Tag punkten C på den gifna peripherien efter behag, gör CE = D, upprita en cirkelbåge med C till medelpunkt och CE till radie, samt drag räta

och den andra af A och E; enligt 31 och 16 proposit. 3:dje Boken.

35 och 36 Propositionerna.

5. Dessa båda Theorem sammanfattas uti följande: Om tvänne räta lineer, som skära hvarandra, äfven skäras af en cirkelperipheri;, så är rectangeln af den enas delar lika stor med rectangeln af den andras delar, hvarje del alltid tagen från de räta lineernas afskärningspunkt till peripherien. Jämför Schol. till 2 prop. 6.

FJERDE BOKEN.

Definitioner .

1. En rätliilig figur säges vara inskrifven uti en rätlinig figur, då hvar och en af den förra figurens vinkelspetsar äro på den sednares sidor.

2. En figur säges vara om-skri f ve n omkring en figur, då hvar och en af den förres sidor gå genom hvar och en af den sednares vinkelspetsar*

3. En rätlinig figur säges vara inskrifven uti en cirkel, då hvar och en af figurens vinkelspetsar äro på cirkelns peripheri. Cirkeln säges då vara omskrifven omkring figuren.

4. En rätlinig figur säges vara omskrifven omkring en cirkel, då hvar och en af figurens sidor tangerar cirkelns peripheri. Cirkeln säges då vara inskrifven uti figuren.

5. Regulier månghörning kallas en plan rätlinig figur, uti hvilken alla sidorna äro lika stora, och alla vinklarne lika stora.

6. En rät linea säges vara passad uti en cirkel, när dess yttersta ändar äro uti cirkelns peripheri.

I Proposition. Problem*

Att uti en gifven cirkel passa en rät linea, som är lika stor med en gifven rät linea, hvilken icke är större än cirkelns diameter.

Bevis. Låt BAC vara den gifna cirkeln och D den gifna räta lineen: Tag punkten C på den gifna peripherien efter behag, gör CE = D, upprita en cirkelbåge med C till medelpunkt och CE till radie, samt drag räta

lineen CA, som då måste vara = CE = D h. s. b. '

II Proposition. Problem,

Att uti en gifven cirkel, ABC, inskrifva en triangel, som är likvinklig med en gifven triangel, DEF.

Drag1 en tangent GH, a; gör vinkeln GAB-D, och HAC = E, b; sammanbind B och C; så är ABC likvinklig med DEF.

Bevis. Emedan vinkeln GAB = D5 och GAB a. 17 prop. 3. = C, c; så måste C = D. På samma

c' 32 [>roP' l Sätt bevises » att B = E 5'och derf5re d 32 prop l måste den ^edje vinkeln BAC, uti den inskrifna triangeln, vara lika .stor med den tredje vinkeln F, uti den gifna triangeln, d; h. s. b.

III Proposition* Problem.

Att omkring en gifven cirkel, ABC, om-skrifva en triangel, som är likvinklig med en gifven triangel DEF.

Drag ut sidan EF &4hG och H; drag en radie KB, gör vinkeln AKB = GED, och vinkeln CKB-= DFH, a; drag sedan genom A, B och C5

räta lineer LM, MN och LN, som tangera cirkeln, b; så skall det bevisas, att triangeln LMN ar likvinklig med triangeln DEF.

Bevis. Uti hvar och en fyrsidig figur AMBK äro alla vinklarne tillsamman-

tagna lika stora med fyra räta; emedan han

a. 23 prop. 1.

b. 17 prop. 3.

c. 32 prop. 1.

d. 18 prop. B.

e. 13 prop. 1.

M B N

kan fördelas uti 2:ne trianglar, som hvardera gifva 2:ne räta vinklar, c. Men nu äro båda vinklarne vid A och vid B räta, eftersom LM och MN tangera cirkeln, d; derföre måste vinklarne M -f- AKB = tvänne räta; d. v. s. att

vinklarne

M + AKB = DEG4-DEF> e;

och då vi gjort. . AKB = DEG så måste . ... . . - M = DEF.

På samma sätt bevises, att vinkeln

N = DFE; och derföre måste den tredje vinkeln r

L = D, c; h. s. b.

IV Proposition. Prolilem*

Att inskrifva en cirkel uti en gifven triangel, ABC.

Skär båda vinklarna B och C midtitu genom BD och CD, a j drag från D räta lineerna 112

lineen CA, som då måste vara = CE = D h. s. b. '

II Proposition. Problem,

Att uti en gifven cirkel, ABC, inskrifva en triangel, som är likvinklig med en gifven triangel, DEF.

Drag1 en tangent GH, a; gör vinkeln GAB-D, och HAC = E, b; sammanbind B och C; så är ABC likvinklig med DEF.

Bevis. Emedan vinkeln GAB = D5 och GAB a. 17 prop. 3. = C, c; så måste C = D. På samma

c' 32 [>roP' l Sätt bevises » att B = E 5'och derf5re d 32 prop l måste den ^edje vinkeln BAC, uti den inskrifna triangeln, vara lika .stor med den tredje vinkeln F, uti den gifna triangeln, d; h. s. b.

III Proposition* Problem.

Att omkring en gifven cirkel, ABC, om-skrifva en triangel, som är likvinklig med en gifven triangel DEF.

Drag ut sidan EF &4hG och H; drag en radie KB, gör vinkeln AKB = GED, och vinkeln CKB-= DFH, a; drag sedan genom A, B och C5

räta lineer LM, MN och LN, som tangera cirkeln, b; så skall det bevisas, att triangeln LMN ar likvinklig med triangeln DEF.

Bevis. Uti hvar och en fyrsidig figur AMBK äro alla vinklarne tillsamman-

tagna lika stora med fyra räta; emedan han

a. 23 prop. 1.

b. 17 prop. 3.

c. 32 prop. 1.

d. 18 prop. B.

e. 13 prop. 1.

M B N

kan fördelas uti 2:ne trianglar, som hvardera gifva 2:ne räta vinklar, c. Men nu äro båda vinklarne vid A och vid B räta, eftersom LM och MN tangera cirkeln, d; derföre måste vinklarne M -f- AKB = tvänne räta; d. v. s. att

vinklarne

M + AKB = DEG4-DEF> e;

och då vi gjort. . AKB = DEG så måste . ... . . - M = DEF.

På samma sätt bevises, att vinkeln

N = DFE; och derföre måste den tredje vinkeln r

L = D, c; h. s. b.

IV Proposition. Prolilem*

Att inskrifva en cirkel uti en gifven triangel, ABC.

Skär båda vinklarna B och C midtitu genom BD och CD, a j drag från D räta lineerna 112

lineen CA, som då måste vara = CE = D h. s. b. '

II Proposition. Problem,

Att uti en gifven cirkel, ABC, inskrifva en triangel, som är likvinklig med en gifven triangel, DEF.

Drag1 en tangent GH, a; gör vinkeln GAB-D, och HAC = E, b; sammanbind B och C; så är ABC likvinklig med

DEF.

Bevis. Emedan vinkeln GAB = D5 och GAB a. 17 prop. 3. = C, c; så måste C = D. På samma

c' 32 [>roP' l Sätt bevises » att B = E 5'och derf5re d 32 prop l måste den ^edje vinkeln BAC, uti den inskrifna triangeln, vara lika .stor med den tredje vinkeln F, uti den gifna triangeln, d; h. s. b.

III Proposition* Problem.

Att omkring en gifven cirkel, ABC, om-skrifva en triangel, som är likvinklig med en gifven triangel DEF.

Drag ut sidan EF &4hG och H; drag en radie KB, gör vinkeln AKB = GED, och vinkeln CKB-= DFH, a; drag sedan genom A, B och C5

räta lineer LM, MN och LN, som tangera cirkeln, b; så skall det bevisas, att triangeln LMN ar likvinklig med triangeln DEF.

Bevis. Uti hvar och en fyrsidig figur AMBK äro alla vinklarne tillsamman-

tagna lika stora med fyra räta; emedan han

a. 23 prop. 1.

b. 17 prop. 3.

c. 32 prop. 1.

d. 18 prop. B.

e. 13 prop. 1.

M B N

kan fördelas uti 2:ne trianglar, som hvardera gifva 2:ne räta vinklar, c. Men nu äro båda vinklarne vid A och vid B räta, eftersom LM och MN tangera cirkeln, d; derföre måste vinklarne M -f- AKB = tvänne räta; d. v. s. att

vinklarne

M + AKB = DEG4-DEF> e;

och då vi gjort. . AKB = DEG så måste . ... . . - M = DEF.

På samma sätt bevises, att vinkeln

N = DFE; och derföre måste den tredje vinkeln r

L = D, c; h. s. b.

IV Proposition. Prolilem*

Att inskrifva en cirkel uti en gifven triangel, ABC.

Skär båda vinklarna B och C midtitu genom BD och CD, a j drag från D räta lineerna 112

lineen CA, som då måste vara = CE = D h. s. b. '

II Proposition. Problem,

Att uti en gifven cirkel, ABC, inskrifva en triangel, som är likvinklig med en gifven triangel, DEF.

Drag1 en tangent GH, a; gör vinkeln GAB-D, och HAC = E, b; sammanbind B och C; så är ABC likvinklig med DEF.

Bevis. Emedan vinkeln GAB = D5 och GAB a. 17 prop. 3. = C, c; så måste C = D. På samma

c' 32 [>roP' l Sätt bevises » att B = E 5'och derf5re d 32 prop l måste den ^edje vinkeln BAC, uti den inskrifna triangeln, vara lika .stor med den tredje vinkeln F, uti den gifna triangeln, d; h. s. b.

III Proposition* Problem.

Att omkring en gifven cirkel, ABC, om-skrifva en triangel, som är likvinklig med en gifven triangel DEF.

Drag ut sidan EF &4hG och H; drag en radie KB, gör vinkeln AKB = GED, och vinkeln CKB-= DFH, a; drag sedan genom A, B och C5

räta lineer LM, MN och LN, som tangera cirkeln, b; så skall det bevisas, att triangeln LMN ar likvinklig med triangeln DEF.

Bevis. Uti hvar och en fyrsidig figur AMBK äro alla vinklarne tillsamman-

tagna lika stora med fyra räta; emedan han

a. 23 prop. 1.

b. 17 prop. 3.

c. 32 prop. 1.

d. 18 prop. B.

e. 13 prop. 1.

M B N

kan fördelas uti 2:ne trianglar, som hvardera gifva 2:ne räta vinklar, c. Men nu äro båda vinklarne vid A och vid B räta, eftersom LM och MN tangera cirkeln, d; derföre måste vinklarne M -f- AKB = tvänne räta; d. v. s. att

vinklarne

M + AKB = DEG4-DEF> e;

och då vi gjort. . AKB = DEG så måste . ... . . - M = DEF.

På samma sätt bevises, att vinkeln

N = DFE; och derföre måste den tredje vinkeln r

L = D, c; h. s. b.

IV Proposition. Prolilem*

Att inskrifva en cirkel uti en gifven triangel, ABC.

Skär båda vinklarna B och C midtitu genom BD och CD, a j drag från D räta lineerna114

DE, DF, DG vinkelräta mot triangelns sidor; så skall det bevisas, att D är medelpunkt, och DE radie till den begärda cirkeln.

Bevis. Vinkeln DEE=DFB;

emedan båda äro räta, och vinkeln DEE = DBF, emedan B är midtitu skuren; sidan BD är gemensam för båda trianglarna; derföre måste sidan DE == DF, c.

a. 9 prop. 1. På samma sätt bevises, att DF=DG.

b. 12 prop. 1.' Tager man då D till medelpunkt

c. 26 prop. 1. och DE tm radie för en periphe.

d. 16 prop. S. ° ° , , «r> -o r

r r n, sa måste hon atven ga genom

F och G; samt vara inskrifven uti triangeln ABC, emedan triangelns alla tre sidor äro vinkelräta mot radierna och tangera således cirkeln, d; h. s. b.

V Proposition. Problem*

Att omskrifvet en cirkel omkring en gifven triangel^ ABC.

Skär tvänne af triangelns sidor, AB och AC, midtitu genom de vinkelräta lineerna DF och EF, a; så skall det bevisas, att den peripheri, som har F till medelpunkt och går genom A, äfven går genom B och C.

Bevis. Drag AF, BF och CF.

Då äro två si- a. 10 och 11 dör DA, DF ' Pr°P- l och.mellanliggan- b' * P*°P- *. de vinkel ADF, lika stora med hvar sin sida DB, DF och mellanliggande vinkel BDF; derföre måste AF = BF, b. På samma sätt bevises, att AF = CF; alltså äro alla tre sidorna, FA = FB = FC5 h. s. b.

t Om triangeln är rätvinklig,

så fäller medelpunkten, F, på den sidan BC, som står emot den räta vinkeln A»

Om triangeln är trubbvinklig, så faller medelpunkten, F, utanför triangeln; men alldeles enahanda bevis eger rum för alla tre händelserna.

TI Proposition* Problem.

Att inskrifva en qvadrat uti en gifven cirkel, AB CD.

Drag tvänne mot hvarandra vinkelräta diame-

a. 11 prop. 1. trär AC och BD, a; sammanbind

b. 4 prop. 1. A med B och med D, samt C med

c. 31 prop. S. g och med D; go . " , , _,

sas, att ABCD är en qvadrat.

DE, DF, DG vinkelräta mot triangelns sidor; så skall det bevisas, att D är medelpunkt, och DE radie till den begärda cirkeln.

Bevis. Vinkeln DEE=DFB;

emedan båda äro räta, och vinkeln DEE = DBF, emedan B är midtitu skuren; sidan BD är gemensam för båda trianglarna; derföre måste sidan DE == DF, c.

a. 9 prop. 1. På samma sätt bevises, att DF=DG.

b. 12 prop. 1.' Tager man då D till medelpunkt

c. 26 prop. 1. och DE tm radie för en periphe.

d. 16 prop. S. ° ° , , «r> -o r

r r n, sa måste hon atven ga genom

F och G; samt vara inskrifven uti triangeln ABC, emedan triangelns alla tre sidor äro vinkelräta mot radierna och tangera således cirkeln, d; h. s. b.

V Proposition. Problem*

Att omskrifvet en cirkel omkring en gifven triangel^ ABC.

Skär tvänne af triangelns sidor, AB och AC, midtitu genom de vinkelräta lineerna DF och EF, a; så skall det bevisas, att den peripheri, som har F till medelpunkt och går genom A, äfven går genom B och C.

Fjerde Boken. 115

Bevis. Drag AF, BF och CF.

Då äro två si- a. 10 och 11 dör DA, DF ' Pr°P- l och.mellanliggan- b' * P*°P- *. de vinkel ADF, lika stora med hvar sin sida DB, DF och mellanliggande vinkel BDF; derföre måste AF = BF, b. På samma sätt bevises, att AF = CF; alltså äro alla tre sidorna, FA = FB = FC5 h. s. b.

t Om triangeln är rätvinklig,

så fäller medelpunkten, F, på den sidan BC, som står emot den räta vinkeln A»

Om triangeln är trubbvinklig, så faller medelpunkten, F, utanför triangeln; men alldeles enahanda bevis eger rum för alla tre händelserna.

TI Proposition* Problem.

Att inskrifva en qvadrat uti en gifven cirkel, AB CD.

Drag tvänne mot hvarandra vinkelräta diame-

a. 11 prop. 1. trär AC och BD, a; sammanbind

b. 4 prop. 1. A med B och med D, samt C med

c. 31 prop. S. g och med D; go . " , , _,

sas, att ABCD är en qvadrat. 114

Fjerde Boken.

DE, DF, DG vinkelräta mot triangelns sidor; så skall det bevisas, att D är medelpunkt, och DE radie till den begärda cirkeln.

Bevis. Vinkeln DEE=DFB;

emedan båda äro räta, och vinkeln DEE = DBF, emedan B är midtitu skuren; sidan BD är gemensam för båda trianglarna; derföre måste sidan DE == DF, c.

a. 9 prop. 1. På samma sätt bevises, att DF=DG.

b. 12 prop. 1.' Tager man då D till medelpunkt

c. 26 prop. 1. och DE tm radie för en periphe.

d. 16 prop. S. ° ° , , «r> -o r

r r n, sa måste hon atven ga genom

F och G; samt vara inskrifven uti triangeln ABC, emedan triangelns alla tre sidor äro vinkelräta mot radierna och tangera således cirkeln, d; h. s. b.

V Proposition. Problem*

Att omskrifvet en cirkel omkring en gifven triangel^ ABC.

Skär tvänne af triangelns sidor, AB och AC, midtitu genom de vinkelräta lineerna DF och EF, a; så skall det

bevisas, att den peripheri, som har F till medelpunkt och går genom A, äfven går genom B och C.

Bevis. Drag AF, BF och CF.

Då äro två si- a. 10 och 11 dör DA, DF ' Pr°P- l och.mellanliggan- b' * P*°P- *. de vinkel ADF, lika stora med hvar sin sida DB, DF och mellanliggande vinkel BDF; derföre måste AF = BF, b. På samma sätt bevises, att AF = CF; alltså äro alla tre sidorna, FA = FB = FC5 h. s. b.

t Om triangeln är rätvinklig,

så fäller medelpunkten, F, på den sidan BC, som står emot den räta vinkeln A»

Om triangeln är trubbvinklig, så faller medelpunkten, F, utanför triangeln; men alldeles enahanda bevis eger rum för alla tre händelserna.

TI Proposition* Problem.

Att inskrifva en qvadrat uti en gifven cirkel, AB CD.

Drag tvänne mot hvarandra vinkelräta diame-

a. 11 prop. 1. trär AC och BD, a; sammanbind

b. 4 prop. 1. A med B och med D, samt C med

c. 31 prop. S. g och med D; go . " , , _,

sas, att ABCD är en qvadrat.

Bevis. Tvänne sidor, EA och EB, samt mellanliggande vinkel AEB, uti triangeln AEB, äro lika stora med hvar sin sida, EA och ED, samt mellanliggande vinkel A ED, uti triangeln AED; derföre är basen l- AD, b. På samma sätt bevises, att AD = DC = CB; alltså är ABCD liksidig.

Vinklarne BAD, ADC, DCB och CBA äro

alla räta; emedan de stå uti halfcirklar, c.

Figuren ABCD är således rätvinklig och liksidig, och alltså en qvadråt, h. s. b.

WI1 Proposition. Problem.

Alt omskrifvet en qvadråt omkring en gifven cirkel, ABCD.

Drag de mot hvarandra vinkelräta diametrarna AC och BD, a, samt genom A, B, C och D tangenterna GF, GH5 HK, KF, b; så skall det bevisas, att FH är en qvadråt.

a. 11 prop. 1.

b. 17 prop. 3.

d 28 ProP* l' e. 34 prop. 1.

E äro räta, d. hvadan AG^ AG = AE

Bevis. Vinkeln AEB är gjord r:jt; vinkeln EBG är äfven rät, c; Derföre är f E Parallel med BG, d. Äfvenledes äro ÄG och EB parallela ; emedan vinklarne vid A och Således är AB en parallelogram, EB, e; men EB = AE ; derföre äro

G

På alldeles samma sätt bevises, att AE = AF, hvaraf följer, alt GF är dubbelt så stor som AE.

K

På samma sätt bevises, att GH är dubbelt så stor som BE, eller som AE; att FK är dubbelt så stor som AE, samt att HK äfven är dubbelt så stor som AE.

Således äro GF = GH = HK = FK, d. v s. figuren FH är liksidig.

Men vinkeln G = AEB, e; derföre är FH äfven rätvinklig, och således en qvadråt; h. s, b.

C or o 11. Den qmskrifna qvadratens sida är lika stor med cirkelns diameter.

VIII Proposition» Problem*

Att inskrifva en cirkel uti en gifven qvfodrat 9 AC.

Skär sidorna AD och AB midtitu uti E och F% a; drag EH parallel med AB, och FK parallel med BC, b; sä skall det bevisas, att G är medelpunkten till den inskrifna cirkeln.

Bevis. Alla figurerna ÄG, a* 10 prop. l EK, FH och GC äro parallelo- b- Jl Pr°P- l grammer; således är AE^FG, c. J JJ Pr°P* }

m/r A T* /% n T, i r» .. ^ 29 Pr°P- l

Men AD = AB, och derföre äro e xe prop. 3 116 Fjerde Boken.

Bevis. Tvänne sidor, EA och EB, samt mellanliggande vinkel AEB, uti triangeln AEB, äro lika stora med hvar sin sida, EA och ED, samt mellanliggande vinkel A ED, uti triangeln AED; derföre är basen l- AD, b. På samma sätt bevises, att AD = DC = CB; alltså är ABCD liksidig.

Vinklarne BAD, ADC, DCB och CBA äro

alla räta; emedan de stå uti halfcirklar, c.

Figuren ABCD är således rätvinklig och liksidig, och alltså en qvadråt, h. s. b.

WI1 Proposition. Problem.

Alt omskrifvet en qvadråt omkring en gifven cirkel, ABCD.

Drag de mot hvarandra vinkelräta diametrarna AC och BD, a, samt genom A, B, C och D tangenterna GF, GH5 HK, KF, b; så skall det bevisas, att FH är en qvadråt.

Fjerde Boken.

117

a. 11 prop. 1.

b. 17 prop. 3.

d 28 ProP* l' e. 34 prop. 1.

E äro räta, d. hvadan AG^ AG = AE

Bevis. Vinkeln AEB är gjord r:jt; vinkeln EBG är äfven rät, c; Derföre är f E Parallel med BG, d. Äfvenledes äro ÄG och EB parallela ; emedan vinklarne vid A och Således är AB en parallelogram, EB, e; men EB = AE ; derföre äro

G

På alldeles samma sätt bevises, att AE = AF, hvaraf följer, alt GF är dubbelt så stor som AE.

K

På samma sätt bevises, att GH är dubbelt så stor som BE, eller som AE; att FK är dubbelt så stor som AE, samt att HK äfven är dubbelt så stor som AE.

Således äro GF = GH = HK = FK, d. v s. figuren FH är liksidig.

Men vinkeln G = AEB, e; derföre är FH äfven rätvinklig, och således en qvadråt; h. s, b.

C or o 11. Den qmskrifna qvadratens sida är lika stor med cirkelns diameter.

VIII Proposition» Problem*

Att inskrifva en cirkel uti en gifven qvfodrat 9 AC.

Skär sidorna AD och AB midtitu uti E och F% a; drag EH parallel med AB, och FK parallel med BC, b; sä skall det bevisas, att G är medelpunkten till den inskrifna cirkeln.

Bevis. Alla figurerna ÄG, a* 10 prop. l EK, FH och GC äro parallelo- b- Jl Pr°P- l grammer; således är AE^FG, c. J JJ Pr°P* }

m/r A T* /% n T, i r» .. ^ 29 Pr°P- l

Men AD = AB, och derföre äro e xe prop. 3 116 Fjerde Boken.

Bevis. Tvänne sidor, EA och EB, samt mellanliggande vinkel AEB, uti triangeln AEB, äro lika stora med hvar sin sida, EA och ED, samt mellanliggande vinkel A ED, uti triangeln AED; derföre är basen l- AD, b. På samma sätt bevises, att AD = DC = CB; alltså är ABCD liksidig.

Vinklarne BAD, ADC, DCB och CBA äro

alla räta; emedan de stå uti halfcirklar, c.

Figuren ABCD är således rätvinklig och liksidig, och alltså en qvadråt, h. s. b.

WI1 Proposition. Problem.

Alt omskrifvet en qvadråt omkring en gifven cirkel, ABCD.

Drag de mot hvarandra vinkelräta diametrarna AC och BD, a, samt genom A, B, C och D tangenterna GF, GH5 HK, KF, b; så skall det bevisas, att FH är en qvadråt.

a. 11 prop. 1.

b. 17 prop. 3.

d 28 ProP* l' e. 34 prop. 1.

E äro räta, d. hvadan AG^ AG = AE

Bevis. Vinkeln AEB är gjord r:jt; vinkeln EBG är äfven rät, c; Derföre är f E Parallel med BG, d. Äfvenledes äro ÄG och EB parallela ; emedan vinklarne vid A och Således är AB en parallelogram, EB, e; men EB = AE ; derföre äro

G

På alldeles samma sätt bevises, att AE = AF, hvaraf följer, alt GF är dubbelt så stor som AE.

K

På samma sätt bevises, att GH är dubbelt så stor som BE, eller som AE; att FK är dubbelt så stor som AE, samt att HK äfven är dubbelt så stor som AE.

Således äro GF = GH = HK = FK, d. v s. figuren FH är liksidig.

Men vinkeln G = AEB, e; derföre är FH äfven rätvinklig, och således en qvadråt; h. s, b.

C or o 11. Den qmskrifna qvadratens sida är lika stor med cirkelns diameter.

VIII Proposition» Problem*

Att inskrifva en cirkel uti en gifven qvfodrat 9 AC.

Skär sidorna AD och AB midtitu uti E och F% a; drag EH parallel med AB, och FK parallel med BC, b; sä skall det bevisas, att G är medelpunkten till den inskrifna cirkeln.

Bevis. Alla figurerna ÄG, a* 10 prop. l EK, FH och GC äro parallelo- b- Jl Pr°P- l grammer; således är AE^FG, c. J JJ Pr°P* }

m/r A T* /% n T, i r» .. ^ 29 Pr°P- l

Men AD = AB, och derföre äro e xe prop. 3118

äfven deras halfparter AE = AF. Alltså är AF = FG, och således äfven EG = FG, c.

D

På samma sätt bevises, att EG = GK = GH. Alltså är G medelpunkt till en peripheri, som går genom E, F, H och K.

H

G

Och efter EH är parallel med AB, samt vinkeln A rät; så måste äfven vinklarne vid E vara räta, d. På samma sätt bevises, att vinklarne vid F, H och K, äro rata. Således tangera sidorna AB, BC, CD, DA, den cirkel, hvars medelpunkt ar G, och hvars peripheri går genom E, F, H, K, e. Alltså är denna cirkel inskrifven uti qvadraten; h, s. b.

IX Proposition» Problem*

Att omskrifvet en cirkel omkring en gifven qv ådrat, A B CD.

Drag diagonalerna AC, DB: det skal) bevisas, att deras a f ska-ringspunkt, E, är medelpunkt till den 0'mskrifna cirkeln.

D

Bevis. Emedan, uti den lik-benta triangeln ADC, vinkeln ADC är rät; så

a. 4 Cor. till måste DAC = DCA = en half rät

32 prop. 1. vinkel, a. På samma sätt bevises,

b. 6 prop. 1. att EDA är en half rät vinkei;

d. v. s. att EAD=EDA; hvaraf följer, att EA = ED, b. På samma sätt bevises, att ED = EC = EB; h. s. b.

X Proposition* Problem.

Att upprita en likbent triangel, som har hvardera vinkeln vid basen dubbelt så stor, som den öfriga vinkeln.

Antag en rät linea AB, skär henne så, att rectangelii

o '

AB.BC^J A@, a; rita en cirkel genom B, med A till medelpunkt; passa uti denna cirkel en rät'linea BD ö AC, b, drag AD; s* skall det bevisas, att ABD är en likbent triangel] som har hvardera af vinklarna ABD och ADB, dubbelt så stor som vinkeln A.

Bevis. Drag CD och .mukrif »

en cirkel omkring triangeln ACB, c. Emedan då BD a AC, och

AB.BCs^AC; så måste AB.BC ==

_ 2

BD, och således BD tangera cir-keln ACD, d. Derföre måste vin-keln BDC = DAC, e.

11 prop. 2.

l prop. 4.

5 prop. 4. 37 prop. S. 32 prop. 3. 32 prop. 1.

5 prop. 1.

6 prop. 1.

Lägger man då till på båda ställen vinkeln CD A; så blifver vinkeln

9

Nu är äfven den yttre vinkeln

BCD = DAC + CDA, f; 118

äfven deras halfparter AE = AF. Alltså är AF = FG, och således äfven EG = FG, c.

D

På samma sätt bevises, att EG = GK = GH. Alltså är G medelpunkt till en peripheri, som går genom E, F, H och K.

H

G

Och efter EH är parallel med AB, samt vinkeln A rät; så måste äfven vinklarne vid E vara räta, d. På samma sätt bevises, att vinklarne vid F, H och K, äro rata. Således tangera sidorna AB, BC, CD, DA, den cirkel, hvars medelpunkt ar G, och hvars peripheri går genom E, F, H, K, e. Alltså är denna cirkel inskrifven uti qvadraten; h, s. b.

IX Proposition» Problem*

Att omskrifvet en cirkel omkring en gifven qv ådrat, A B CD.

Drag diagonalerna AC, DB: det skal) bevisas, att deras a f ska-ringspunkt, E, är medelpunkt till den 0'mskrifna cirkeln.

D

Bevis. Emedan, uti den lik-benta triangeln ADC, vinkeln ADC är rät; så

a. 4 Cor. till måste DAC = DCA = en half rät

32 prop. 1. vinkel, a. På samma sätt bevises,

b. 6 prop. 1. att EDA är en half rät vinkei;

d. v. s. att EAD=EDA; hvaraf följer, att EA = ED, b. På samma sätt bevises, att ED = EC = EB; h. s. b.

X Proposition* Problem.

Att upprita en likbent triangel, som har hvardera vinkeln vid basen dubbelt så stor, som den öfriga vinkeln.

Antag en rät linea AB, skär henne så, att rectangelii

o '

AB.BC^J A@, a; rita en cirkel genom B, med A till medelpunkt; passa uti denna cirkel en rät'linea BD ö AC, b, drag AD; s* skall det bevisas, att ABD är en likbent triangel] som har hvardera af vinklarna ABD och ADB, dubbelt så stor som vinkeln A.

Bevis. Drag CD och .mukrif »

en cirkel omkring triangeln ACB, c. Emedan då BD a AC, och

AB.BCs^AC; så måste AB.BC ==

_ 2

BD, och således BD tangera cir-keln ACD, d. Derföre måste vin-keln BDC = DAC, e.

11 prop. 2.

l prop. 4.

5 prop. 4. 37 prop. S. 32 prop. 3. 32 prop. 1.

5 prop. 1.

6 prop. 1.

Lägger man då till på båda ställen vinkeln CD A; så blifver vinkeln

9

Nu är äfven den yttre vinkeln

BCD = DAC + CDA, f; 118

Fjerde Boken.

äfven deras halfparter AE = AF. Alltså är AF = FG, och således äfven EG = FG, c.

D

På samma sätt bevises, att EG = GK = GH. Alltså är G medelpunkt till en peripheri, som går genom E, F, H och K.

H

G

Och efter EH är parallel med AB, samt vinkeln A rät; så måste äfven vinklarne vid E vara räta, d. På samma sätt bevises, att vinklarne vid F, H och K, äro rata. Således tangera sidorna AB, BC, CD, DA, den cirkel, hvars medelpunkt ar G, och hvars peripheri går genom E, F, H, K, e. Alltså är denna cirkel inskrifven uti qvadraten; h, s. b.

IX Proposition» Problem*

Att omskrifvet en cirkel omkring en gifven qv ådrat, A B CD.

Drag diagonalerna AC, DB: det skal) bevisas, att deras a f ska-ringspunkt, E, är medelpunkt till den 0'mskrifna cirkeln.

D

Bevis. Emedan, uti den lik-benta triangeln ADC, vinkeln ADC är rät; så

a. 4 Cor. till måste DAC = DCA = en half rät

32 prop. 1. vinkel, a. På samma sätt bevises,

b. 6 prop. 1. att EDA är en half rät vinkei;

d. v. s. att EAD=EDA; hvaraf följer, att EA = ED, b. På samma sätt bevises, att ED = EC = EB; h. s. b.

X Proposition* Problem.

Att upprita en likbent triangel, som har hvardera vinkeln vid basen dubbelt så stor, som den öfriga vinkeln.

Antag en rät linea AB, skär henne så, att rectangelii

o '

AB.BC^J A@, a; rita en cirkel genom B, med A till medelpunkt; passa uti denna cirkel en rät'linea BD ö AC, b, drag AD; s* skall det bevisas, att ABD är en likbent triangel] som har hvardera af vinklarna ABD och ADB, dubbelt så stor som vinkeln A.

Bevis. Drag CD och .mukrif »

en cirkel omkring triangeln ACB, c. Emedan då BD a AC, och

AB.BCs^AC; så måste AB.BC ==

_ 2

BD, och således BD tangera cir-keln ACD, d. Derföre måste vin-keln BDC = DAC, e.

11 prop. 2.

l prop. 4.

5 prop. 4. 37 prop. S. 32 prop. 3. 32 prop. 1.

5 prop. 1.

6 prop. 1.

Lägger man då till på båda ställen vinkeln CD A; så blifver vinkeln

9

Nu är äfven den yttre vinkeln

BCD = DAC + CDA, f;120

derföre måste vinkeln

BD A = BCD. Men nu är ABD en likbent^triangel; derföre måste

BDA = DBA5 g;

alltså är......DBA = BCD, eller DEC=BCD;

hvaraf åter följer, att

BD ~ CD, h.

Men BD är gjord ~ AC, således är A C = CD; och således vinkeln DAC = CDA; hvarföre ock DAC + CDA är

dubbelt så stor som vinkeln A; och då det förut är bevist, att BD A = DAC + CDA; så måste vinkeln BD A vara dubbelt så stor som A; och således måste äfven vinkeln DBA vara dubbelt så stor som A; h. s. b.

XI Proposition* Problem.

Att uti en gifven cirkel DEFGH inskrifva en regulier femhörning.

Upprita en triangel ABC, som har hvardera vinkeln B o^h C dubbelt så stor som A, a; in-skrif uti den gifna cirkeln en med honom lik-vinklig triangel, b; så att vinkeln

Skär sedan vinklarna ÉHG och EGH midtitu gfe-nom räta lineerna HF och GD, c, octi drag HD, DE, EF9 FG ; så skall det bevisas, att femhörnin-gen DEFGH är regulier.

Bevis. Emedan hvardera vinkeln EHGoch EGH är dubbelt så stor som HEG, och de båda

a. So prop. ö.

e> 29 prop. 3.

f. 2T prop. 3.

DE F till på

vinkl. EHG, EGH äro

midtitu skurna genom HF och GD; så måste alla 5 vinklarne HEG = EHF = FHG = EGD=DGH; och till följe deraf bågarna

HG = EF = FG = ED = DH, d; a 10 prop. 4. samt således äfven räta lineerna *. 2 Pr°P- 4-

HG = EF = FG = ED = DH, e; e, j .. « , .. . ,., .,. ' *

således ar femhormngen liksidig.

Vidare, emedan bågen DH=GF, så blifver, när man lägger bågen båda ställen, bågarne

HDEF = DEFG;

och således vinkeln .FGH-GHD*, f.. På samma sätt bevises, att vinklarne

GHD = HDE = DEF = EFG. Enär alltså femhorningen är både liksidig och likvinkliga så är han regulier, h. s. b.

XII Proposition* Problem*

Att omskrifvet en regulier femhörning omkring en gifven cirkel, IHKLM.

Uti den gifna cirkeln inskrifver man en regulier femhörning, a: Låt I5 H, K, L, M vara de punkter på peripherien, uti hvilka den inskrifna f enhörningens vinkelspetsar stå: drag, genom dessa punkter, tangenterna AB, BC, CD, DE,

derföre måste vinkeln

BD A = BCD. Men nu är ABD en likbent^triangel; derföre måste

BDA = DBA5 g;

alltså är......DBA = BCD, eller DEC=BCD;

hvaraf åter följer, att

BD ~ CD, h.

Men BD är gjord ~ AC, således är A C = CD; och således vinkeln DAC = CDA; hvarföre ock DAC + CDA är dubbelt så stor som vinkeln A; och då det förut är bevist, att BD A = DAC + CDA; så måste vinkeln BD A vara dubbelt så stor som A; och således måste äfven vinkeln DBA vara dubbelt så stor som A; h. s. b.

XI Proposition* Problem.

Att uti en gifven cirkel DEFGH inskrifva en regulier femhörning.

Upprita en triangel ABC, som har hvardera vinkeln B o^h C dubbelt så stor som A, a; in-skrif uti den gifna cirkeln en med honom lik-vinklig triangel, b; så att vinkeln

Skär sedan vinklarna ÉHG och EGH midtitu gfe-nom räta lineerna HF och GD, c, octi drag HD, DE, EF9 FG ; så skall det bevisas, att femhörnin-gen DEFGH är regulier.

Bevis. Emedan hvardera vinkeln EHGoch EGH är dubbelt så stor som HEG, och de båda

a. So prop. ö.

e> 29 prop. 3.

f. 2T prop. 3.

DE F till på

vinkl. EHG, EGH äro

midtitu skurna genom HF och GD; så måste alla 5 vinklarne HEG = EHF = FHG = EGD=DGH; och till följe deraf bågarna

HG = EF = FG = ED = DH, d; a 10 prop. 4. samt således äfven räta lineerna *. 2 Pr°P- 4-

HG = EF = FG = ED = DH, e; e, j .. « , .. . ,., .,. ' *

således ar femhormngen liksidig.

Vidare, emedan bågen DH=GF, så blifver, när man lägger bågen båda ställen, bågarne

HDEF = DEFG;

och således vinkeln .FGH-GHD*, f.. På samma sätt bevises, att vinklarne

GHD = HDE = DEF = EFG. Enär alltså femhorningen är både liksidig och likvinkliga så är han regulier, h. s. b.

XII Proposition* Problem*

Att omskrifvet en regulier femhörning omkring en gifven cirkel, IHKLM.

Uti den gifna cirkeln inskrifver man en regulier femhörning, a: Låt I5 H, K, L, M vara de punkter på peripherien, uti hvilka den inskrifna f enhörningens vinkelspetsar stå: drag, genom dessa punkter, tangenterna AB, BC, CD, DE,

derföre måste vinkeln

BD A = BCD. Men nu är ABD en likbent^triangel; derföre måste

BDA = DBA5 g;

alltså är......DBA = BCD, eller DEC=BCD;

hvaraf åter följer, att

BD ~ CD, h.

Men BD är gjord ~ AC, således är A C = CD; och således vinkeln DAC = CDA; hvarföre ock DAC + CDA är dubbelt så stor som vinkeln A; och då det förut är bevist, att BD A = DAC + CDA; så måste vinkeln BD A vara dubbelt så stor som A; och således måste äfven vinkeln DBA vara dubbelt så stor som A; h. s. b.

XI Proposition* Problem.

Att uti en gifven cirkel DEFGH inskrifva en regulier femhörning.

Upprita en triangel ABC, som har hvardera vinkeln B o^h C dubbelt så stor som A, a; in-skrif uti den gifna cirkeln en med honom lik-vinklig triangel, b; så att vinkeln

Skär sedan vinklarna ÉHG och EGH midtitu gfe-nom räta lineerna HF och GD, c, octi drag HD, DE, EF9 FG ; så skall det bevisas, att femhörnin-gen DEFGH är regulier.

Bevis. Emedan hvardera vinkeln EHGoch EGH är dubbelt så stor som HEG, och de båda

a. So prop. ö.

e> 29 prop. 3.

f. 2T prop. 3.

DE F till på

vinkl. EHG, EGH äro

midtitu skurna genom HF och GD; så måste alla 5 vinklarne HEG = EHF = FHG = EGD=DGH; och till följe deraf bågarna

HG = EF = FG = ED = DH, d; a 10 prop. 4. samt således äfven räta lineerna *. 2 Pr°P- 4-

HG = EF = FG = ED = DH, e; e, j .. « , .. . ,., .,. ' *

således ar femhormngen liksidig.

Vidare, emedan bågen DH=GF, så blifver, när man lägger bågen båda ställen, bågarne

HDEF = DEFG;

och således vinkeln .FGH-GHD*, f.. På samma sätt bevises, att vinklarne

GHD = HDE = DEF = EFG. Enär alltså femhorningen är både liksidig och likvinkliga så är han regulier, h. s. b.

XII Proposition* Problem*

Att omskrifvet en regulier femhörning omkring en gifven cirkel, IHKLM.

Uti den gifna cirkeln inskrifver man en regulier femhörning, a: Låt I5 H, K, L, M vara de punkter på peripherien, uti hvilka den inskrifna f enhörningens vinkelspetsar stå: drag, genom dessa punkter, tangenterna AB, BC, CD, DE,

E A, b; så skall det bevisas, att ABCDE är en regulier femhörning.

Bevis. Drag radierna FI, FM, FL, och räta lineerna FE, FD.

Emedan AE tangerar cirkeln; så måste vinklarne vid I vara räta, c, Likaledes äro vinklarne vid M och vid L räta. Således måste

FE2=Fl2+"lEj d,

och FE2=FM^EM,d, hvaraf följer, att

E M

a. 11 prop. 4

b. 17 prop. S;

c. 18 prop. S

d. 47 prop. l

e. 8 prop. l

f. 27 prop. 3

g. 26 prop. l

och, emedan Ff2=: FM ; så måste TE^EM, och således är IE = EM.

Uti de båda trianglarna, FEI och FEM, äro således alla sidorna uti den ena lika stora med hvar sin sida uti den andra triangeln, derföre måste vinkeln

IFE = EFM, e;

hvaraf följer, att vinkeln IF M är dubbelt så stor, som EFM.

Få samma sätt bevises, att vinkeln MFL är dubbelt så stor, som MFD.

Men bågen IM är lika stor med bågen ML, hvaraf följer, att vinkeln IFM = MFL, f; och således äro äfven deras halfparter EFM =: MFD.

Uti de båda trianglarna EFM och DFM äro således tvänne vinklar, vid F och vid M, uti hvardera triangeln lika stora, och sidan FM gemensam; derföre måste

EM = DM, g, och således är ED dubbelt så , stor, som EM.

På samma sätt bevises, att AE är dubbelt så stor, som 1E.

Då det nu förut är bevist, att EM = 1E, så måste äfven ED = AE.

På lika sätt bevises, att ED = DC = CB - BÄ; alltså är femhörningen liksidig.

Sluteligen är vinkeln FEM = FEI, e; hvadan ME I är dubbelt så stor, som FEM; och vinkeln MDC är dubbelt så stor, som FDM; men vinkeln

derföre måste äfven

MEI = MDC; och på samma sätt bevises, att vinklarne

EDC = DCB = CBA = BAB ; alltså är femhörningen likvinkliga och liksidig, och således regulier, h, s. b.

Proposition. Problem.

Att uti en gifven regulier femhörning inskrifva en cirkel.

E A, b; så skall det bevisas, att ABCDE är en regulier femhörning.

Bevis. Drag radierna FI, FM, FL, och räta lineerna FE, FD.

Emedan AE tangerar cirkeln; så måste vinklarne vid I vara räta, c, Likaledes äro vinklarne vid M och vid L räta. Således måste

FE2=Fl2+"lEj d,

och FE2=FM^EM,d, hvaraf följer, att

E M

a. 11 prop. 4

b. 17 prop. S;

c. 18 prop. S

d. 47 prop. l

e. 8 prop. l

f. 27 prop. 3

g. 26 prop. l

och, emedan Ff2=: FM ; så måste TE^EM, och således är IE = EM.

Uti de båda trianglarna, FEI och FEM, äro således alla sidorna uti den ena lika stora med hvar sin sida uti den andra triangeln, derföre måste vinkeln

IFE = EFM, e;

hvaraf följer, att vinkeln IF M är dubbelt så stor, som EFM.

Få samma sätt bevises, att vinkeln MFL är dubbelt så stor, som MFD.

Men bågen IM är lika stor med bågen ML, hvaraf följer, att vinkeln IFM = MFL, f; och således äro äfven deras halfparter EFM =: MFD.

Uti de båda trianglarna EFM och DFM äro således tvänne vinklar, vid F och vid M, uti hvardera triangeln lika stora, och sidan FM gemensam; derföre måste

EM = DM, g, och således är ED dubbelt så , stor, som EM.

På samma sätt bevises, att AE är dubbelt så stor, som 1E.

Då det nu förut är bevist, att EM = 1E, så måste äfven ED = AE.

På lika sätt bevises, att ED = DC = CB - BÄ; alltså är femhörningen liksidig.

Sluteligen är vinkeln FEM = FEI, e; hvadan ME I är dubbelt så stor, som FEM; och vinkeln MDC är dubbelt så stor, som FDM; men vinkeln

derföre måste äfven

MEI = MDC; och på samma sätt bevises, att vinklarne

EDC = DCB = CBA = BAB ; alltså är femhörningen likvinkliga och liksidig, och således regulier, h, s. b.

Proposition. Problem.

Att uti en gifven regulier femhörning inskrifva en cirkel.

Skär femhorningens ena vinkel BCD midtitu genom CF; a, skärsedan sidan CD midtitu genom vinkelräta lineen KF, b; drag FH, FG, FI, FL vinkelräta mot femhorningens sidor; så skall det bevisas, att F är medelpunkten, och FK radie till den inskrifna cirkeln.

Bevis. Drag räta lineen FD.

Emedan CK = KD, F K = FK, och vinklarne vid K äro räta; så måste vinkeln FCK=FDK, c; men FCK är femhorningens halfva vin-.. 9 prop. 1. kel, derföre måste äfven FDK va-

b. 12 prop. 1. ra femhorningens halfva vinkel,

c. 26 prop. 1. ^ v, g. att vinkeln

d. 4 prop. 1. * FDK = FDH.

e. 16 prop. 3. ^ de båda trianglarna FKD, FHD

äro således vinklarne vid D lika stora, äfvensom vid H och K, samt sidan FD gemensam; derföre måste KD = DH, och

d.

På samma sätt bevises, att FH = FG - FI = FL; så att, om man tager F till medelpunkt, och FK till radie för en cirkel, så går dess peripheri genom K, H, G, I och L; och denna cirkel ar da inskrifven uti femhörningen; ty då vinklarne vid

K, H, G, I och L äro räta, tangera femhorningens alla sidor cirkeln, e; h. s. b.

' \

Coroll. Om man skär tvänne närliggande vinklar uti en regulier månghörning midtitu, och från de skärande lineernas afskäringspunkt drager räta lineer till de öfriga hörnen uti månghörningen; så blifva äfven de Öfrige vinklarne uti månghörningen derigenom skurna midtitu.

Den funna afskärningspunkten är den in* skrifna cirkelns medelpunkt.

XIV Proposition. Problem.

Att omkring en gifven regulier femhörning omskrifvet en cirkel.

Skär vinklarna BDC och DCE midtitu genom FD och FC, a; så skall det bevisas, att F är medelpunkten till den omskrifna cirkeln.

Bevis. Drag FB, FA, FE; a. 9 prop. 1. så blifva alla vinklarne vid peri- b- Jjr' Jlål 4 pherien halfparter af femhörnin- c 6 ^j/ ^ gens vinkel, b; och följakteligen

FBD = FDB = FDC = FCD = FEC o. s. v.; 124 Fjerde Boken.

Skär femhorningens ena vinkel BCD midtitu genom CF; a, skärsedan sidan CD midtitu genom vinkelräta lineen KF, b; drag FH, FG, FI, FL vinkelräta mot femhorningens sidor; så skall det bevisas, att F är medelpunkten, och FK radie till den inskrifna cirkeln.

Bevis. Drag räta lineen FD.

Emedan CK = KD, F K = FK, och vinklarne vid K äro räta; så måste vinkeln FCK=FDK, c; men FCK är femhorningens halfva vin-.. 9 prop. 1. kel, derföre måste äfven FDK va-

b. 12 prop. 1. ra femhorningens halfva vinkel,

c. 26 prop. 1. ^ v, g. att vinkeln

d. 4 prop. 1. * FDK = FDH.

e. 16 prop. 3. ^ de båda trianglarna FKD, FHD

äro således vinklarne vid D lika stora, äfvensom vid H och K, samt sidan FD gemensam; derföre måste KD = DH, och

d.

På samma sätt bevises, att FH = FG - FI = FL; så att, om man tager F till medelpunkt, och FK till radie för en cirkel, så går dess peripheri genom K, H, G, I och L; och denna cirkel ar da inskrifven uti femhörningen; ty då vinklarne vid

K, H, G, I och L äro räta, tangera femhorningens alla sidor cirkeln, e; h. s. b.

' \

Coroll. Om man skär tvänne närliggande vinklar uti en regulier månghörning midtitu, och från de skärande lineernas afskäringspunkt drager räta lineer till de öfriga hörnen uti månghörningen; så blifva äfven de Öfrige vinklarne uti månghörningen derigenom skurna midtitu.

Den funna afskärningspunkten är den in* skrifna cirkelns medelpunkt.

XIV Proposition. Problem.

Att omkring en gifven regulier femhörning omskrifvet en cirkel.

Skär vinklarna BDC och DCE midtitu genom FD och FC, a; så skall det bevisas, att F är medelpunkten till den omskrifna cirkeln.

Bevis. Drag FB, FA, FE; a. 9 prop. 1. så blifva alla vinklarne vid peri- b- Jjr' Jlål 4 pherien halfparter af femhörnin- c 6 ^j/ ^ gens vinkel, b; och följakteligen

FBD = FDB = FDC = FCD = FEC o. s. v.;126

alltså måste, uti de fem trianglarna, de sidor, som stå emot lika stora vinklar, vara lika stora; d. v. s. att

~FD = FE = FA~FB, c; h. s. b.

Proposition. Problem.

Ätt uti en gifven cirkel inskrifva en regulier Sexhörning.

Drag en diameter, GC, till den gifna cirkeln ABCDEG, tag C till medelpunkt för en peripheri BFD genom den gifna cirkelns medelpunkt F ; drag, genom F, räta lineerna BE och DA, sammanbind A och B, B och C, C och D, D och E, E och G, samt G och A: så skall det bevisas, att rätlinigä figuren ABCDEG ar regulier.

Bevis. Alla tre trianglarne AFB, BFC, CFD äro liksidiga och således hvar och en af deras vinklar lika stora med två tredjedelar af en

a. 32 prop. 1. rät vinkel, a, och följaktligen lika

b. 15 prop. 1. stora med hvarandra; derföre må-

c. 26 prop. 3. gte vinklarne

d. 29 prop. 3. APR ~ RFP - r-PD

e. 27 prop. 3. Afctf - Kb L - Cb U ,

och emedan de äro lika stora med sina vertical-vinklar, b; så äro alla sex vinklarne omkring F lika stora.

Deraf följer, att bågarne AB, BC, CD, DE, EG äro lika stora med hvarandra, c; och således måste äfven räta lineerna

= BC = CD = DE = EG = GA, d;

således är sexhörningen liksidig.

Han är äfven likvinkliga emedan hvar och en af hans vinklar är dubbelt så stor som två tredjedelar af en rät vinkel, h. s. b.

Co roll. 1. Sidan af en regulier Sexhörning, som är inskrifven uti en cirkel, är lika stor med cirkelns radie.

Coroll. 2. Om man blott sammanbinder hvarannan af punkterna A, B, C, etc. med hvarandra, så erhålles den i cirkeln inskrifna liksidiga triangeln GBD,

En regulier Sexhörning kan omskrifvas omkring cirkeln, om man genom A, B, C, D, E, G drager tangenter till cirkeln.

Äfvenledes kan en cirkel omskrifvas omkring en regulier Sexhörning, och

En cirkel inskrifyas uti en regulier Sexhörning, på samma sätt, som vid femhörningen vi-sadt är.

Proposition. Problem.

Att uti en gifven cirkel inskrifva en regulier femtonhorning.

Inskrif en liksidig triangel ACD och en regulier femhörning ABFGH uti cirkeln; s^ att de 126

alltså måste, uti de fem trianglarna, de sidor, som stå emot lika stora vinklar, vara lika stora; d. v. s. att

~FD = FE = FA~FB, c; h. s. b.

Proposition. Problem.

Ätt uti en gifven cirkel inskrifva en regulier Sexhörning.

Drag en diameter, GC, till den gifna cirkeln ABCDEG, tag C till medelpunkt för en peripheri BFD genom den gifna cirkelns medelpunkt F ; drag, genom F, räta lineerna BE och DA, sammanbind A och B, B och C, C och D, D och E, E och G, samt G och A: så skall det bevisas, att rätlinigä figuren ABCDEG ar regulier.

Bevis. Alla tre trianglarne AFB, BFC, CFD äro liksidiga och således hvar och en af deras vinklar lika stora med två tredjedelar af en

a. 32 prop. 1. rät vinkel, a, och följaktligen lika

b. 15 prop. 1. stora med hvarandra; derföre må-

c. 26 prop. 3. gte vinklarne

d. 29 prop. 3. APR ~ RFP - r-PD

e. 27 prop. 3. Afctf - Kb L - Cb U ,

och emedan de äro lika stora med sina vertical-vinklar, b; så äro alla sex vinklarne omkring F lika stora.

Fjerde Boken.

127

Deraf följer, att bågarne AB, BC, CD, DE, EG äro lika stora med hvarandra, c; och således måste äfven räta lineerna

= BC = CD = DE = EG = GA, d;

således är sexhörningen liksidig.

Han är äfven likvinkliga emedan hvar och en af hans vinklar är dubbelt så stor som två tredjedelar af en rät vinkel, h. s. b.

Co roll. 1. Sidan af en regulier Sexhörning, som är inskrifven uti en cirkel, är lika stor med cirkelns radie.

Coroll. 2. Om man blott sammanbinder hvarannan af punkterna A, B, C, etc. med hvarandra, så erhålles den i cirkeln inskrifna liksidiga triangeln GBD,

En regulier Sexhörning kan omskrifvas omkring cirkeln, om man genom A, B, C, D, E, G drager tangenter till cirkeln.

Äfvenledes kan en cirkel omskrifvas omkring en regulier Sexhörning, och

En cirkel inskrifyas uti en regulier Sexhörning, på samma sätt, som vid femhörningen vi-sadt är.

Proposition. Problem.

Att uti en gifven cirkel inskrifva en regulier femtonhorning.

Inskrif en liksidig triangel ACD och en regulier femhörning ABFGH uti cirkeln; s^ att de 126

alltså måste, uti de fem trianglarna, de sidor, som stå emot lika stora vinklar, vara lika stora; d. v. s. att

~FD = FE = FA~FB, c; h. s. b.

Proposition. Problem.

Ätt uti en gifven cirkel inskrifva en regulier Sexhörning.

Drag en diameter, GC, till den gifna cirkeln ABCDEG, tag C till medelpunkt för en peripheri BFD genom den gifna cirkelns medelpunkt F ; drag, genom F, räta lineerna BE och DA, sammanbind A och B, B och C, C och D, D och E, E och G, samt G och A: så skall det bevisas, att rätlinigä figuren ABCDEG ar regulier.

Bevis. Alla tre trianglarne AFB, BFC, CFD äro liksidiga och således hvar och en af deras vinklar lika stora med två tredjedelar af en

a. 32 prop. 1. rät vinkel, a, och följaktligen lika

b. 15 prop. 1. stora med hvarandra; derföre må-

c. 26 prop. 3. gte vinklarne

d. 29 prop. 3. APR ~ RFP - r-PD

e. 27 prop. 3. Afctf - Kb L - Cb U ,

och emedan de äro lika stora med sina vertical-vinklar, b; så äro alla sex vinklarne omkring F lika stora.

Deraf följer, att bågarne AB, BC, CD, DE, EG äro lika stora med hvarandra, c; och således måste äfven räta lineerna

= BC = CD = DE = EG = GA, d;

således är sexhörningen liksidig.

Han är äfven likvinkliga emedan hvar och en af hans vinklar är dubbelt så stor som två tredjedelar af en rät vinkel, h. s. b.

Co roll. 1. Sidan af en regulier Sexhörning, som är inskrifven uti en cirkel, är lika stor med cirkelns radie.

Coroll. 2. Om man blott sammanbinder hvarannan af punkterna A, B, C, etc. med hvarandra, så erhålles den i cirkeln inskrifna liksidiga triangeln GBD,

En regulier Sexhörning kan omskrifvas omkring cirkeln, om man genom A, B, C, D, E, G drager tangenter till cirkeln.

Äfvenledes kan en cirkel omskrifvas omkring en regulier Sexhörning, och

En cirkel inskrifyas uti en regulier Sexhörning, på samma sätt, som vid femhörningen vi-sadt är.

Proposition. Problem.

Att uti en gifven cirkel inskrifva en regulier femtonhorning.

Inskrif en liksidig triangel ACD och en regulier femhörning ABFGH uti cirkeln; s^ att de128

hafva en gemensam spets, A; sammanbind C oeh F; så skall det bevisas, att CF är den inskrifna reguliera femtonhörningens sida.

Bevis. Emedan AB och BF äro sidor uti den reguliera femhörningen, som är inskrifven uti cirkeln, så upptaga de hvardera en femtedel, eller tre femtondedelar, och således tillhopa sex femtondedelar af hela peripherien.

Emedan AC är den inskrifna liksidiga triangelns sida, så upptager hon en tredjedel, eller fem femtondedelar af peripherien.

Skillnaden dem imellan, bågen CF, utgör således en femtondedel af peripherien, och räta lineen CF den inskrifna reguliera femtonhörningens sida, h. s. b.

Att omskrifvet en regulier femtonhörning omkring en gifven cirkel.

Att omskrifva en cirkel omkring en regulier femtonhorning, samt

Att inskrifva en cirkel uti en regulier femtonhör ning 9 sker såsom vid femhörningen är visadt.

Om man delar de bågar, som den inskrifna qvadratens sidor upptaga midtitu, dessa hälfter åter midtitu, o. s. v., så är klart, att man derigenom kan erhålla den inskrifna och omskrifna reguliera åttahörningen, sextonhörningen o. s4 v.

Börjar man en dylik midtitu-delning på den reguliera femhörningens bågar, så erhållas derigenom den reguliera tiohörningen, tjugohörnin-gen, o. s. v.

Verkställer man åter samma delning på de bågar,' som upptagas af den reguliera sexhörnin-gens sidor; så erhållas derigenom den reguliera tolfhörningen, tjugufyrahörningen, o. s. v.

XIII Proposition. Problem*

Att på en gifven rät linea upprita en regulier månghörning, t. ex. en femhörning.

Man uppritar en cirkel, och inskrifver uti honom en regulier femhörning, (11 prop. 4); derefter skär man tvänne vinklar i månghörningen midtitu, och afsätter halfparten vid hvardera yttersta ändan af den gifna räta lineen, hvarigenom man erhåller medelpunkten till en cirkelperipheri genom den gifna räta lineens båda yttersta änclar, uti hvilken man blott behöfver ap-tera den gifna räta lineen, för att erhålla den reguliera månghörningen. 128

hafva en gemensam spets, A; sammanbind C oeh F; så skall det bevisas, att CF är den inskrifna reguliera femtonhörningens sida.

Bevis. Emedan AB och BF äro sidor uti den reguliera femhörningen, som är inskrifven uti cirkeln, så upptaga de hvardera en femtedel, eller tre femtondedelar, och således tillhopa sex femtondedelar af hela peripherien.

Emedan AC är den inskrifna liksidiga triangelns sida, så upptager hon en tredjedel, eller fem femtondedelar af peripherien.

Skillnaden dem imellan, bågen CF, utgör således en femtondedel af peripherien, och räta lineen CF den inskrifna reguliera femtonhörningens sida, h. s. b.

Att omskrifvet en regulier femtonhörning omkring en gifven cirkel.

Att omskrifva en cirkel omkring en regulier femtonhorning, samt

Att inskrifva en cirkel uti en regulier femtonhör ning 9 sker såsom vid femhörningen är visadt.

Om man delar de bågar, som den inskrifna qvadratens sidor upptaga midtitu, dessa hälfter åter midtitu, o. s. v., så är klart, att man derigenom kan erhålla den inskrifna och omskrifna reguliera åttahörningen, sextonhörningen o. s4 v.

Börjar man en dylik midtitu-delning på den reguliera femhörningens bågar, så erhållas derigenom den reguliera tiohörningen, tjugohörnin-gen, o. s. v.

Verkställer man åter samma delning på de bågar,' som upptagas af den reguliera sexhörnin-gens sidor; så erhållas derigenom den reguliera tolfhörningen, tjugufyrahörningen, o. s. v.

XIII Proposition. Problem*

Att på en gifven rät linea upprita en regulier månghörning, t. ex. en femhörning.

Man uppritar en cirkel, och inskrifver uti honom en regulier femhörning, (11 prop. 4); derefter skär man tvänne vinklar i månghörningen midtitu, och afsätter halfparten vid hvardera yttersta ändan af den gifna räta lineen, hvarigenom man erhåller medelpunkten till en cirkelperipheri genom den gifna räta lineens båda yttersta änclar, uti hvilken man blott behöfver ap-tera den gifna räta lineen, för att erhålla den reguliera månghörningen.

FEMTE BOKEN.

Definitioner.

1. En mindre storhet kallas Part af en större, då den mindre jämnt mäter den större. Den mindre kallas då äfven mått för den större.

2. En större storhet kallas Mångfaldig af en mindre, då den större jämnt mätes af den mindre.

3. Förhållande är den inbördes storleken

imellan tvänne storheter, som äro af samma slag.

4. Storheter hafva förhållande till hvarandra, (äro af samma slag) af hvilka den ena kan tagas så många gånger, att hon blifver större, än den andra.

5. Af fyra storheter säges den första hafva till den andra samma förhållande, som den tre-

dje har till den fjerde., om en mångfaldig första är större, lika stor med, eller mindre, än en mångfaldig af den andra, alltefter som en lika mångfaldig af den tredje, som af den första, är större, lika stor med, eller mindre, än en lika mångfaldig af den fjerde, som af den andra; ehuru mångfaldiga de än må tagas.

6. Storheter, som hafva samma förhållande till hvarandra, kallas proportionella.

7. Om en mångfaldig af den första är större, än en mångfaldig af den andra, och en lika mångfaldig af den tredje, som af den första, icke är större, än en lika mångfaldig af den fjerde, som af den andra; så, har den första till den andra ett större förhållande, än den tredje har till den fjerde.

8. Likhet imellan tvänne förhållanden kallas analogie eller proportion.

Förklaringar öfver dessa 8 definitioner. Defin. l och 2.

Storheten a kallas part af storheten 3.a; men 3.a kallas mångfaldig af a.

Defin. 3.

Förhållandet angifves genom en gemensam mångfaldig af de båda storheterna. T. ex. lineen a har till lineen b ett sådant förhållande, att 2a = 3b.

Skulle nu c hafva till d äfven ett sådant forhållande, att 2c = 3d; så är det klart, att a har till b samma förhållande, som c har till d. Defin. 8.

Det förhållande, som a har till b, betecknas med a:b;

Likaledes betecknas det förhållande, som c har till d, med c : d;

och att dessa båda förhållanden äro lika, betecknas med analogien, eller proportionen

a : b = c : d.

Analogien läses sålunda: "a är till b, som c till d;" eller: "a förhåller sig till b, som c till d;" eller: "a, b, c och d äro proportionella."

Defin. 7.

Men om t. ex. 2a > 3b, under det att 2c vore lika stor med, eller mindre, än 3d; så kan ej a hafva till b samma förhållande som c har till d; utan säges då a hafva till b ett större förhållande, än c har till d; eller c hafva till d ett mindre förhållande, än a har till b; hvilket sålunda betecknas:

Om....... 2a > 3b;

men.......2c =< 3d;

så säges ..... a:b > c:d; eller.......c : d < a : b.

Defin. 5.

Det under defin. 3 uppgifna kännemärket på likheten imellan tvänne förhållanden, är ej användbart, då storheterna äro incommensurabla; d. v. s. sådana storheter, som hvarken hafva något gemensamt mått, eller någon gemensam mångfaldig.

Skulle det likväl ej finnas någon mångfaldig af den första, som vore större än en mångfaldig af den andra, under det att en lika mångfaldig af den tredje, som af den första, icke är större, än en lika mångfaldig af den fjerde, som af

den andra:

och om det icke heller funnes någon mångfaldig af den första, som vore mindre än en mångfaldig af den andra, under det att en lika mångfaldig af den tredje, som af den första, icke är mindre, än en lika mångfaldig af den fjerde, som af den andra;

så kan det förhållande, som den första har till den andra, hvarken vara större, eller mindre, än det förhållande, som den tredje har till den fjerde, utan måste således vara lika stort med detta sednare förhållande; storheterna må då vara commensurabla eller incommensurabla.

Denna definition betecknas sålunda:

Om.....m.a > =

allteftersom . . . m.c > =

för hvilka hela numertal m och n, som heldst;

så säges .... a:b = c:d;

och äro således de kännemärken, som denna 5:te definition innehålla, inga andra än: Då ett förhållande hvarken är större, eller mindre, än ett annat förhållande; så är det lika stort med detta andra förhållande.

När heldst man vill bevisa, att

a:b = e:d, behöfver man endast bevisa, att .... m.a > = < n.b,134

allteftersom . . . m.c > = < n.d; och när heldst man vill bevisa, att m.a > zz < n.b,

allteftersom . , . m.c > = < n.d, behöfver man endast bevisa, att. . a:b = c:d.

9. Uti en analogi finnes minst trenne termer; t. ex. ..... a:b = b:c.

10. Om tre storheter äro continuerligen proportionella, säges det förhållande, som den första har till den tredje,, vara duplicerad* af det, som hon har till den andra. . '

Om ...*.. a:b s= b:c så är a:c dupliceradt af a:b.

11. Om fyra storheter äro continuerligen proportionella, så säges det förhållande, som den första har till den fjerde, vara tripliceradt af det förhållande, som hon har till den andra.

Om .... a:b = b:c = c:d; så är förhållandet a:d tripliceradt af a:b.

12. Uti ett förhållande kallas den första storheten foregående term, och den andra storheten efterföljande term.

Uti en analogie kallas de båda föregående sinsimellan homologa termer; äfvensom de båda efterföljande sinsimellan kallas homologa termer.

Uti a:b = c:d, är a homolog med c, och b homolog med d.

13. Alternera eller vexla om är att jämföra de homologa termerna med hvarandra.

Att alternera termerna uti analogien a:b = c:d, är att i stället skrifva a:c =: b:d.

14. Invertera? omvända, ett förhållande, är att taga den efterföljande till föregående, och den föregående till efterföljande.

Förhållandet b:a är inverteradt af a:b.

15. Sammansätta storheterna uti ett förhållande, är att taga summan af den föregående och efterföljande till en föregående term, och den efterföljande till efterföljande;

Såsom om man i stället för a:b, skrifver a + b:b.

1.6, Fördela storheterna uti ett förhållande, är att taga skillnaden imellan den föregående och efterföljande såsom en föregående term, och den efterföljande till efterföljande.

Såsom om man i stället för a:b, skrifver a-b:b.

IT. Convertera är att i sället för a:b, skrifva a:a-b.

18. Bland ett antal gifna storheter, som alla äro af samma slag, säges det förhållande, som den första har till den sista, vara sammansatt af det förhållande, som den första har till den andra, af det förhållande, som den andra har till den tredje, o. s. v., samt af det förhållande, som näst den sista har till den sista.

Bland storheterna a, b, c, d etc., som alla antagas vara af samma slag, säges förhållandet

a:d vara sammansatt af förhållandena a:b, b:c, och c;d; hvilket man sålunda betecknar

19. Sex storheter, A, B, C; och a, b, c, sägas vara proportionella i ordning om

Ä:B = a:b och B:C = b:c.

20. Sex storheter, A, B, C; och a, b, c, sägas vara proportionella utan ordning , om

A:B = b:c och B:C = a:b.

Förklaring öfver W:de, \\:te och lS:de definitionerna.

18:de Definit.

Förhållandet a:d beror af alla förhållandena a:b, b:c och c:d; och för att uttrycka detta beroende, kallas förhållandet a:d sammansatt af alla förhållandena a:b, b:c och c:d; dessa förhållanden må för öfrigt vara huru som heldst.

10:de Definit.

Men äro de båda förhållandena a:b och b:c lilia stora, och förhållandet a:c således är sammansatt af 2:ne lika förhållanden; så kallas det dupliceradt, f or dubblad t ., af ettdera bland dem, af a;b, eller af b:c.

ll:te Definit.

Äro de trenne förhållandena a:b, b:c, och c:d, lika stora, och förhållandet a:d således är sam-

mansatt af 3:ne sinsimellan lika förhållanden; så kallas det tripliceradt 9 tredubblad t, af ettdera bland dem, af a:b, eller af b:c, eller af c:d.

Om a:b = b:c; så kallas c tredje proportio-nålen till a och b; men b kallas medlerst a proportionalen till a och c.

Om a:b~c:d; så kallas d fjerde proportionalen till a, b och c.

I Proposition. Theorem.

Om huru många storheter, det vara må, äro lika mångfaldiga af hvar sin, bland lika många andra storheter; så äro alla tillsam-manstagna lika mångfaldiga af alla tillsam-manstagna, som hvar och en af sin.

Om .... a = m.x,

och..........b = m.y,

samt.........c = m.z;

så är.....a + b + c = m. (x + y -f z). . 2 axiom.

II Proposition. Theorem.

Om den första är lika mångfaldig af den andra, som den tredje af den fjerde; och den femte är lika mångfaldig af den andra> som den sjette af den fjerde; sä skall den första och den femte tillhopa vara lika mångfaldiga af den andra, som den tredje och sjette till-hopa äro af den fjerde.

a:d vara sammansatt af förhållandena a:b, b:c, och c;d; hvilket man sålunda betecknar

19. Sex storheter, A, B, C; och a, b, c, sägas vara proportionella i ordning om

Ä:B = a:b och B:C = b:c.

20. Sex storheter, A, B, C; och a, b, c, sägas vara proportionella utan ordning , om

A:B = b:c och B:C = a:b.

Förklaring öfver W:de, \\:te och lS:de definitionerna.

18:de Definit.

Förhållandet a:d beror af alla förhållandena a:b, b:c och c:d; och för att uttrycka detta beroende, kallas förhållandet a:d sammansatt af alla förhållandena a:b, b:c och c:d; dessa förhållanden må för öfrigt vara huru som heldst.

10:de Definit.

Men äro de båda förhållandena a:b och b:c lilia stora, och förhållandet a:c således är sammansatt af 2:ne lika förhållanden; så kallas det dupliceradt, f or dubblad t ., af ettdera bland dem, af a;b, eller af b:c.

ll:te Definit.

Äro de trenne förhållandena a:b, b:c, och c:d, lika stora, och förhållandet a:d således är sam-

mansatt af 3:ne sinsimellan lika förhållanden; så kallas det tripliceradt 9 tredubblad t, af ettdera bland dem, af a:b, eller af b:c, eller af c:d.

Om a:b = b:c; så kallas c tredje proportio-nålen till a och b; men b kallas medlerst a proportionalen till a och c.

Om a:b~c:d; så kallas d fjerde proportionalen till a, b och c.

I Proposition. Theorem.

Om huru många storheter, det vara må, äro lika mångfaldiga af hvar sin, bland lika många andra storheter; så äro alla tillsam-manstagna lika mångfaldiga af alla tillsam-manstagna, som hvar och en af sin.

Om .... a = m.x,

och..........b = m.y,

samt.........c = m.z;

så är.....a + b + c = m. (x + y -f z). . 2 axiom.

II Proposition. Theorem.

Om den första är lika mångfaldig af den andra, som den tredje af den fjerde; och den femte är lika mångfaldig af den andra> som den sjette af den fjerde; sä skall den första och den femte tillhopa vara lika mångfaldiga af den andra, som den tredje och sjette till-hopa äro af den fjerde.

10 * 136

a:d vara sammansatt af förhållandena a:b, b:c, och c;d; hvilket man sålunda betecknar

19. Sex storheter, A, B, C; och a, b, c, sägas vara proportionella i ordning om

Ä:B = a:b och B:C = b:c.

20. Sex storheter, A, B, C; och a, b, c, sägas vara proportionella utan ordning , om

A:B = b:c och B:C = a:b.

Förklaring öfver W:de, \\:te och lS:de definitionerna.

18:de Definit.

Förhållandet a:d beror af alla förhållandena a:b, b:c och c:d; och för att uttrycka detta beroende, kallas förhållandet a:d sammansatt af alla förhållandena a:b, b:c och c:d; dessa förhållanden må för öfrigt vara huru som heldst.

10:de Definit.

Men äro de båda förhållandena a:b och b:c lilia stora, och förhållandet a:c således är sammansatt af 2:ne lika förhållanden; så kallas det dupliceradt, f or dubblad t ., af ettdera bland dem, af a;b, eller af b:c.

ll:te Definit.

Äro de trenne förhållandena a:b, b:c, och c:d, lika stora, och förhållandet a:d således är sam-

mansatt af 3:ne sinsimellan lika förhållanden; så kallas det tripliceradt 9 tredubblad t, af ettdera bland dem, af a:b, eller af b:c, eller af c:d.

Om a:b = b:c; så kallas c tredje proportio-nålen till a och b; men b kallas medlerst a proportionalen till a och c.

Om a:b~c:d; så kallas d fjerde proportionalen till a, b och c.

I Proposition. Theorem.

Om huru många storheter, det vara må, äro lika mångfaldiga af hvar sin, bland lika många andra storheter; så äro alla tillsam-manstagna lika mångfaldiga af alla tillsam-manstagna, som hvar och en af sin.

Om .... a = m.x,

och..........b = m.y,

samt.........c = m.z;

så är.....a + b + c = m. (x + y -f z). . 2 axiom.

II Proposition. Theorem.

Om den första är lika mångfaldig af den andra, som den tredje af den fjerde; och den femte är lika mångfaldig af den andra> som den sjette af den fjerde; sä skall den första och den femte tillhopa vara lika mångfaldiga af den andra, som den tredje och sjette till-hopa äro af den fjerde.

Om

a = m.x, och b = m y, samt . . . c = n.x, och d~n.y; så skall a -f c = (m4n).x5och b -f d ^(m-f-n)y . 2 ax.

III Proposition. Theorem.

Om den första är lika mångfaldig af den andra, som den tredje af den fjerde, och man tager lika mångfaldiga af den första och tredje; så skola dessa tagna storheterna vara lika mångfaldiga af den andra och fjerde.

c~n.a

och och

b=.m.y,

Om

och om.

så måste . na =: m.n.x, och n. b = m.n.y; det vill säga c = m.n.x, och d = m.n.y h. s. b. l ax.

IV Proposition. Theorem.

Om fyra storheter äro proportionella, och man tager lika mångfaldiga af deras ho-mologa termer; så blifva äfven dessa mångfaldiga proportionella.

Om så skall

. . . a:b = c:d; . m.arn.b = m.c:n.d.

Bevis. Ty eftera:b= c:d; så måste . . . p.m.a > = < q.n.b, allteftersom . p.m.c > = < q.n.d; ... 5 def. 5. och om man dä betraktar de fyra mångfaldiga, m.a, n.b, m.c och n.d, såsom gifna storheter;

gå är .... p.(m.a) > = < q.(n.b), allteftersom p.(m.c) > =, < q.(n.d), för hvilka numertal p och q som heldst; hvadan ....m.a:n.b = m.crn.d, h. s. b. . 5 def. 5.

V Proposition. Theorem.

Om en storhet är lika mångfaldig af den hela, som en frän den förra borttagen delar nf en fruT deT sednare borttagen del; så skall den återstående vara lika mångfaldig af den återstående, som den hela är af den hela.

Om . . a = m,x,

och.....b^m.y;

så skall . . a-b=m(x-y)

Sax.

VI Proposition. Theorem.

Om tvänne storheter äro lika mångfaldiga af tvänne andra storheter., och man jrån de förra tager bort lika mångfaldiga af de sednare; så skola äfven de återstående vara lika mångfaldiga af de sednare.

Om . . a ~ m.x, och b=m.y,

samt.....c^n.x, och b=n.y;

så skall. . a-c = (m-n),x, och b-d = (m~n).y Sax,

VII Proposition. Theorem.

Lika stora hafva samma förhållande till en och samma tredje storhet En och samma 138

Om

a = m.x, och b = m y, samt . . . c = n.x, och d~n.y; så skall a -f c = (m4n).x5och b -f d ^(m-f-n)y . 2 ax.

III Proposition. Theorem.

Om den första är lika mångfaldig af den andra, som den tredje af den fjerde, och man tager lika mångfaldiga af den första och tredje; så skola dessa tagna storheterna vara lika mångfaldiga af den andra och fjerde.

c~n.a

och och

b=.m.y,

Om

och om.

så måste . na =: m.n.x, och n. b = m.n.y; det vill säga c = m.n.x, och d = m.n.y h. s. b. l ax.

IV Proposition. Theorem.

Om fyra storheter äro proportionella, och man tager lika mångfaldiga af deras ho-mologa termer; så blifva äfven dessa mångfaldiga proportionella.

Om så skall

. . . a:b = c:d; . m.arn.b = m.c:n.d.

Bevis. Ty eftera:b= c:d; så måste . . . p.m.a > = < q.n.b, allteftersom . p.m.c > = < q.n.d; ... 5 def. 5. och om man dä betraktar de fyra mångfaldiga, m.a, n.b, m.c och n.d, såsom gifna storheter;

gå är .... p.(m.a) > = < q.(n.b), allteftersom p.(m.c) > =, < q.(n.d), för hvilka numertal p och q som heldst; hvadan ....m.a:n.b = m.crn.d, h. s. b. . 5 def. 5.

V Proposition. Theorem.

Om en storhet är lika mångfaldig af den hela, som en frän den förra borttagen delar nf en fruT deT sednare borttagen del; så skall den återstående vara lika mångfaldig af den återstående, som den hela är af den hela.

Om . . a = m,x,

och.....b^m.y;

så skall . . a-b=m(x-y)

Sax.

VI Proposition. Theorem.

Om tvänne storheter äro lika mångfaldiga af tvänne andra storheter., och man jrån de förra tager bort lika mångfaldiga af de sednare; så skola äfven de återstående vara lika mångfaldiga af de sednare.

Om . . a ~ m.x, och b=m.y,

samt.....c^n.x, och b=n.y;

så skall. . a-c = (m-n),x, och b-d = (m~n).y Sax,

VII Proposition. Theorem.

Lika stora hafva samma förhållande till en och samma tredje storhet En och samma 138

Om

a = m.x, och b = m y, samt . . . c = n.x, och d~n.y; så skall a -f c = (m4n).x5och b -f d ^(m-f-n)y . 2 ax.

III Proposition. Theorem.

Om den första är lika mångfaldig af den andra, som den tredje af den fjerde, och man tager lika mångfaldiga af den första och tredje; så skola dessa tagna storheterna vara lika mångfaldiga af den andra och fjerde.

c~n.a

och och

b=.m.y,

Om

och om.

så måste . na =: m.n.x, och n. b = m.n.y; det vill säga c = m.n.x, och d = m.n.y h. s. b. l ax.

IV Proposition. Theorem.

Om fyra storheter äro proportionella, och man tager lika mångfaldiga af deras ho-mologa termer; så blifva äfven dessa mångfaldiga proportionella.

Om så skall

. . . a:b = c:d; . m.arn.b = m.c:n.d.

Bevis. Ty eftera:b= c:d; så måste . . . p.m.a > = < q.n.b, allteftersom . p.m.c > = < q.n.d; ... 5 def. 5. och om man dä betraktar de fyra mångfaldiga, m.a, n.b, m.c och n.d, såsom gifna storheter;

gå är .... p.(m.a) > = < q.(n.b), allteftersom p.(m.c) > =, < q.(n.d), för hvilka numertal p och q som heldst; hvadan ....m.a:n.b = m.crn.d, h. s. b. . 5 def. 5.

V Proposition. Theorem.

Om en storhet är lika mångfaldig af den hela, som en frän den förra borttagen delar nf en fruT deT sednare borttagen del; så skall den återstående vara lika mångfaldig af den återstående, som den hela är af den hela.

Om . . a = m,x,

och.....b^m.y;

så skall . . a-b=m(x-y)

Sax.

VI Proposition. Theorem.

Om tvänne storheter äro lika mångfaldiga af tvänne andra storheter., och man jrån de förra tager bort lika mångfaldiga af de sednare; så skola äfven de återstående vara lika mångfaldiga af de sednare.

Om . . a ~ m.x, och b=m.y,

samt.....c^n.x, och b=n.y;

så skall. . a-c = (m-n),x, och b-d = (m~n).y Sax,

VII Proposition. Theorem.

Lika stora hafva samma förhållande till en och samma tredje storhet En och samma

Om

a = m.x, och b = m y, samt . . . c = n.x, och d~n.y; så skall a -f c = (m4n).x5och b -f d ^(m-f-n)y . 2 ax.

III Proposition. Theorem.

Om den första är lika mångfaldig af den andra, som den tredje af den fjerde, och man tager lika mångfaldiga af den första och tredje; så skola dessa tagna storheterna vara lika mångfaldiga af den andra och fjerde.

c~n.a

och och

b=.m.y,

Om

och om.

så måste . na =: m.n.x, och n. b = m.n.y; det vill säga c = m.n.x, och d = m.n.y h. s. b. l ax.

IV Proposition. Theorem.

Om fyra storheter äro proportionella, och man tager lika mångfaldiga af deras ho-mologa termer; så blifva äfven dessa mångfaldiga proportionella.

Om så skall

. . . a:b = c:d; . m.arn.b = m.c:n.d.

Bevis. Ty eftera:b= c:d; så måste . . . p.m.a > = < q.n.b, allteftersom . p.m.c > = < q.n.d; ... 5 def. 5. och om man dä betraktar de fyra mångfaldiga, m.a, n.b, m.c och n.d, såsom gifna storheter;

gå är .... p.(m.a) > = < q.(n.b), allteftersom p.(m.c) > =, < q.(n.d), för hvilka numertal p och q som heldst; hvadan ....m.a:n.b = m.crn.d, h. s. b. . 5 def. 5.

V Proposition. Theorem.

Om en storhet är lika mångfaldig af den hela, som en frän den förra borttagen delar nf en fruT deT sednare borttagen del; så skall den återstående vara lika mångfaldig af den återstående, som den hela är af den hela.

Om . . a = m,x,

och.....b^m.y;

så skall . . a-b=m(x-y)

Sax.

VI Proposition. Theorem.

Om tvänne storheter äro lika mångfaldiga af tvänne andra storheter., och man jrån de förra tager bort lika mångfaldiga af de sednare; så skola äfven de återstående vara lika mångfaldiga af de sednare.

Om . . a ~ m.x, och b=m.y,

samt.....c^n.x, och b=n.y;

så skall. . a-c = (m-n),x, och b-d = (m~n).y Sax,

VII Proposition. Theorem.

Lika stora hafva samma förhållande till en och samma tredje storhet En och samma 138

Om

a = m.x, och b = m y, samt . . . c = n.x, och d~n.y; så skall a -f c = (m4n).x5och b -f d ^(m-f-n)y . 2 ax.

III Proposition. Theorem.

Om den första är lika mångfaldig af den andra, som den tredje af den fjerde, och man tager lika mångfaldiga af den första och tredje; så skola dessa tagna storheterna vara lika mångfaldiga af den andra och fjerde.

c~n.a

och och

b=.m.y,

Om

och om.

så måste . na =: m.n.x, och n. b = m.n.y; det vill säga c = m.n.x, och d = m.n.y h. s. b. l ax.

IV Proposition. Theorem.

Om fyra storheter äro proportionella, och man tager lika mångfaldiga af deras ho-mologa termer; så blifva äfven dessa mångfaldiga proportionella.

Om så skall

. . . a:b = c:d; . m.arn.b = m.c:n.d.

Bevis. Ty eftera:b= c:d; så måste . . . p.m.a > = < q.n.b, allteftersom . p.m.c > = < q.n.d; ... 5 def. 5. och om man dä betraktar de fyra mångfaldiga, m.a, n.b, m.c och n.d, såsom gifna storheter;

gå är .... p.(m.a) > = < q.(n.b), allteftersom p.(m.c) > =, < q.(n.d), för hvilka numertal p och q som heldst; hvadan ....m.a:n.b = m.crn.d, h. s. b. . 5 def. 5.

V Proposition. Theorem.

Om en storhet är lika mångfaldig af den hela, som en frän den förra borttagen delar nf en fruT deT sednare borttagen del; så skall den återstående vara lika mångfaldig af den återstående, som den hela är af den hela.

Om . . a = m,x,

och.....b^m.y;

så skall . . a-b=m(x-y)

Sax.

VI Proposition. Theorem.

Om tvänne storheter äro lika mångfaldiga af tvänne andra storheter., och man jrån de förra tager bort lika mångfaldiga af de sednare; så skola äfven de återstående vara lika mångfaldiga af de sednare.

Om . . a ~ m.x, och b=m.y,

samt.....c^n.x, och b=n.y;

så skall. . a-c = (m-n),x, och b-d = (m~n).y Sax,

VII Proposition. Theorem.

Lika stora hafva samma förhållande till en och samma tredje storhet En och samma 138

Om

a = m.x, och b = m y, samt . . . c = n.x, och d~n.y; så skall a -f c = (m4n).x5och b -f d ^(m-f-n)y . 2 ax.

III Proposition. Theorem.

Om den första är lika mångfaldig af den andra, som den tredje af den fjerde, och man tager lika mångfaldiga af den första och tredje; så skola dessa tagna storheterna vara lika mångfaldiga af den andra och fjerde.

c~n.a

och och

b=.m.y,

Om

och om.

så måste . na =: m.n.x, och n. b = m.n.y; det vill säga c = m.n.x, och d = m.n.y h. s. b. l ax.

IV Proposition. Theorem.

Om fyra storheter äro proportionella, och man tager lika mångfaldiga af deras ho-mologa termer; så blifva äfven dessa mångfaldiga proportionella.

Om så skall

. . . a:b = c:d; . m.arn.b = m.c:n.d.

Bevis. Ty eftera:b= c:d; så måste . . . p.m.a > = < q.n.b, allteftersom . p.m.c > = < q.n.d; ... 5 def. 5. och om man dä betraktar de fyra mångfaldiga, m.a, n.b, m.c och n.d, såsom gifna storheter;

gå är .... p.(m.a) > = < q.(n.b), allteftersom p.(m.c) > =, < q.(n.d), för hvilka numertal p och q som heldst; hvadan ....m.a:n.b = m.crn.d, h. s. b. . 5 def. 5.

V Proposition. Theorem.

Om en storhet är lika mångfaldig af den hela, som en frän den förra borttagen delar nf en fruT deT sednare borttagen del; så skall den återstående vara lika mångfaldig af den återstående, som den hela är af den hela.

Om . . a = m,x,

och.....b^m.y;

så skall . . a-b=m(x-y)

Sax.

VI Proposition. Theorem.

Om tvänne storheter äro lika mångfaldiga af tvänne andra storheter., och man jrån de förra tager bort lika mångfaldiga af de sednare; så skola äfven de återstående vara lika mångfaldiga af de sednare.

Om . . a ~ m.x, och b=m.y,

samt.....c^n.x, och b=n.y;

så skall. . a-c = (m-n),x, och b-d = (m~n).y Sax,

VII Proposition. Theorem.

Lika stora hafva samma förhållande till en och samma tredje storhet En och samma140

har samma förhållande till dem, som äro lika stora.

l:o Om a~b; så skall a:c = b:c.

Bevis. Ty då a = b; så måste m.a = m. b , och således .... m.a >:=< n.c allteftersom . m.b > = < n.c, hvadan......a:c = b:c? h. s. b. ... 5 def. 5.

2:o Om a = b; så skall c:a = c:b.

Ty då a = b; så måste m.a = m.b; och således ......n.c > = < m.a

allteftersom . n.c > .= < m.b;

hvadan ..... c:a = c:b, h. s. b. ... 5 def. 5.

¥111 Proposition. Theorem.

Af olika storheter har den större ett större förhållande till en tredje storhet, än den mindre har till samma tredje storhet; men en och samma har ett större förhållande till den mindre än till den större.

l:o Om a >b; så skall a:c >b:c.

Bevis. Ty låt d vara lika stor med skillnaden imellan a och b; så att

a = b + d. Tag sedan en mångfaldig af d, som är större än c,

m.d > c;

och låt n.c vara den största mångfaldiga af c, som ej är större, än m.b; så att

m,b > = n,c

men ....m.b < (n*l).c.

Emedan då .... m.d > c

och........m.b > = n.c

så måste . m.b -l- m.d > n.c + c

eller.....m. (b + d) > (n + l).c

men...... . . . b + d = a; derföre måste

m.a > (n+ l).c, under det att, såsom förut är bevist, m.b < (n + l).c, hvadan ...... a:c> b:c, h. s. b. . . 7 def. 5.

2:o Om .... a > b; så skall c:b > c:a.

Bevis. Vi hafve uti nästföregående funnit 2:ne numertal m och (n +1). c, som göra

(n-fl).c > m.b, under det att (n+l).c

Proposition* Theorem.

De, som hafva samma förhållande till en och samma, äro lika stora; och de, till hvilka en och samma har samma förhållande, äro lika stora-

l:o Om a:c~b:c; så skall a-b.

Bevis. Ty om a ^ b; så skulle a:c^b:c8pr.5. och om......a ^ b; så skulle b ^>a9och således.......b:c ^ a:c; eller a:c ^ b:c 8pr.5.

Derföre^då hvarken a ^ b, eller a ^ b; så måste a = b, h, s. b.

2:o Om c:a^^c:b; så skall a = b. 140

Femte Boken.

har samma förhållande till dem, som äro lika stora.

l:o Om a~b; så skall a:c = b:c.

Bevis. Ty då a = b; så måste m.a = m. b , och således .... m.a >:=< n.c allteftersom . m.b > = < n.c, hvadan......a:c = b:c? h. s. b. ... 5 def. 5.

2:o Om a = b; så skall c:a = c:b.

Ty då a = b; så måste m.a = m.b; och således ......n.c > = < m.a

allteftersom . n.c > .= < m.b;

hvadan ..... c:a = c:b, h. s. b. ... 5 def. 5.

¥111 Proposition. Theorem.

Af olika storheter har den större ett större förhållande till en tredje storhet, än den mindre har till samma tredje storhet; men en och samma har ett större förhållande till den mindre än till den större.

l:o Om a >b; så skall a:c >b:c.

Bevis. Ty låt d vara lika stor med skillnaden imellan a och b; så att

a = b + d. Tag sedan en mångfaldig af d, som är större än c,

m.d > c;

och låt n.c vara den största mångfaldiga af c, som ej är större, än m.b; så att

m,b > = n,c

Femte Boken. 141

men ....m.b < (n*l).c.

Emedan då .... m.d > c

och........m.b > = n.c

så måste . m.b -l- m.d > n.c + c

eller.....m. (b + d) > (n + l).c

men...... . . . b + d = a; derföre måste

m.a > (n+ l).c, under det att, såsom förut är bevist, m.b < (n + l).c, hvadan ...... a:c> b:c, h. s. b. . . 7 def. 5.

2:o Om .... a > b; så skall c:b > c:a.

Bevis. Vi hafve uti nästföregående funnit 2:ne numertal m och (n +1). c, som göra

(n-fl).c > m.b, under det att (n+l).c

Proposition* Theorem.

De, som hafva samma förhållande till en och samma, äro lika stora; och de, till hvilka en och samma har samma förhållande, äro lika stora-

l:o Om a:c~b:c; så skall a-b.

Bevis. Ty om a ^ b; så skulle a:c^b:c8pr.5. och om......a ^ b; så skulle b ^>a9och således.......b:c ^ a:c; eller a:c ^ b:c 8pr.5.

Derföre^då hvarken a ^ b, eller a ^ b; så måste a = b, h, s. b.

2:o Om c:a^^c:b; så skall a = b. 140

har samma förhållande till dem, som äro lika stora.

l:o Om a~b; så skall a:c = b:c.

Bevis. Ty då a = b; så måste m.a = m. b , och således .... m.a >:=< n.c allteftersom . m.b > = < n.c, hvadan......a:c = b:c? h. s. b. ... 5 def. 5.

2:o Om a = b; så skall c:a = c:b.

Ty då a = b; så måste m.a = m.b; och således ......n.c > = < m.a

allteftersom . n.c > .= < m.b;

hvadan ..... c:a = c:b, h. s. b. ... 5 def. 5.

¥111 Proposition. Theorem.

Af olika storheter har den större ett större förhållande till en tredje storhet, än den mindre har till samma tredje storhet; men en och samma har ett större förhållande till den mindre än till den större.

l:o Om a >b; så skall a:c >b:c.

Bevis. Ty låt d vara lika stor med skillnaden imellan a och b; så att

a = b + d. Tag sedan en mångfaldig af d, som är större än c,

m.d > c;

och låt n.c vara den största mångfaldiga af c, som ej är större, än m.b; så att

m,b > = n,c

men ....m.b < (n*l).c.

Emedan då .... m.d > c

och........m.b > = n.c

så måste . m.b -l- m.d > n.c + c

eller.....m. (b + d) > (n + l).c

men...... . . . b + d = a; derföre måste

m.a > (n+ l).c, under det att, såsom förut är bevist, m.b < (n + l).c, hvadan ...... a:c> b:c, h. s. b. . . 7 def. 5.

2:o Om .... a > b; så skall c:b > c:a.

Bevis. Vi hafve uti nästföregående funnit 2:ne numertal m och (n +1). c, som göra

(n-fl).c > m.b, under det att (n+l).c

Proposition* Theorem.

De, som hafva samma förhållande till en och samma, äro lika stora; och de, till hvilka en och samma har samma förhållande, äro lika stora-

l:o Om a:c~b:c; så skall a-b.

Bevis. Ty om a ^ b; så skulle a:c^b:c8pr.5. och om......a ^ b; så skulle b ^>a9och således.......b:c ^ a:c; eller a:c ^ b:c 8pr.5.

Derföre^då hvarken a ^ b, eller a ^ b; så måste a = b, h, s. b.

2:o Om c:a^^c:b; så skall a = b.142

Bevis. Ty icke är a^b; emedan då

c:b ^> c:a.................8 pr. 5.

icke heller är a <^ b, emedan då

c:a > c:b.................8 pr. 5.

Derföre måste a = b; h. s b.

X. Proposition. Theorem*

Af storheter , som hafva förhållande till en och samma, är den större., som har ett större förhållande ; men den, till hvilken en och samma 'har ett större förhållande, är mindre.

l:o Om

b:c; så skall a b.

Bevis. Ty hvarken kan a - b, eller a <^ b; emedan i förra fallet skulle a:cr=^b:c. . . 7 pr. 5. och i sednare fallet skulle b;c ^ a:c, eller

a:c <^ b:c .... 8 pr. 5.

Således måste . . a ^ b, h. s. b.

2:o Om , .

c;a; så skall b <^ a,

Bevis. Ty hvarken kan b=a, eller b> a; emedan i förra fallet skulle c:b - c:a . . 7 pr. 5. och i sednare fallet skulle . c:a^c:b, eller

c:b «^c:a. . . 8 pr. 5.

XI Proposition» Theorem.

De förhållanden., som äro lika med ett

och samma > äro sinsimellan lika,

Om......a:b -c:d,

och........c:d - e:f;

så skall......a:b=e:f.

Bevis. Emedanarb = c:d; så måste

m.a ^ - <^ n.b

allteftersom . , m.c ^ - <^n.d;.....5 def. 5.

och emedan .... c;d = e:f; så måste

m.c ^ = ^ n.d

allteftersom . . m.e ^ = <^ n.f......5 def. 5.

Derföre måste m.a ^ = <^ n.b allteftersom . . m.e ^ == <^ n.f och således . , . . a:b = e:f, h. s. b. . . 5 def. 5.

Proposition. Theorem.

Om storheter, ehuru många de vårarna, äro proportionella, och alla af samma slag; så är summan af alla de föregående till summan af alla de efterföljande, som hvarje föregående till sin efterföljande.

Om såskall

z^ c:d - e:f;

= a:b = c;d ^ e:ff

Bevis. Ty efter a:b = c:d=re:f5 så måste, om .... m.a ^ n.b,

äfven .... m.c ^ n.d,

och .... m.e ^ n.f ,

samt alltså m (a + c -f e) ^> n. (b + d + f). På samma sätt blifver det tydligt, att om

m.a = eller ^ n.b ; så måste m.(a + c -f e) = eller ^ n. (b + d + f). 142

Femte Boken.

Bevis. Ty icke är a^b; emedan då

c:b ^> c:a.................8 pr. 5.

icke heller är a <^ b, emedan då

c:a > c:b.................8 pr. 5.

Derföre måste a = b; h. s b.

X. Proposition. Theorem*

Af storheter , som hafva förhållande till en och samma, är den större., som har ett större förhållande ; men den, till hvilken en och samma 'har ett större förhållande, är mindre.

l:o Om

b:c; så skall a b.

Bevis. Ty hvarken kan a - b, eller a <^ b; emedan i förra fallet skulle a:cr=^b:c. . . 7 pr. 5. och i sednare fallet skulle b;c ^ a:c, eller

a:c <^ b:c .... 8 pr. 5.

Således måste . . a ^ b, h. s. b.

2:o Om , .

c;a; så skall b <^ a,

Bevis. Ty hvarken kan b=a, eller b> a; emedan i förra fallet skulle c:b - c:a . . 7 pr. 5. och i sednare fallet skulle . c:a^c:b, eller

c:b «^c:a. . . 8 pr. 5.

XI Proposition» Theorem.

De förhållanden., som äro lika med ett

och samma > äro sinsimellan lika,

Om......a:b -c:d,

och........c:d - e:f;

så skall......a:b=e:f.

Bevis. Emedanarb = c:d; så måste

m.a ^ - <^ n.b

allteftersom . , m.c ^ - <^n.d;.....5 def. 5.

och emedan .... c;d = e:f; så måste

m.c ^ = ^ n.d

allteftersom . . m.e ^ = <^ n.f......5 def. 5.

Derföre måste m.a ^ = <^ n.b allteftersom . . m.e ^ == <^ n.f och således . , . . a:b = e:f, h. s. b. . . 5 def. 5.

Proposition. Theorem.

Om storheter, ehuru många de vårarna, äro proportionella, och alla af samma slag; så är summan af alla de föregående till summan af alla de efterföljande, som hvarje föregående till sin efterföljande.

Om såskall

z^ c:d - e:f;

= a:b = c;d ^ e:ff

Bevis. Ty efter a:b = c:d=re:f5 så måste, om .... m.a ^ n.b,

äfven .... m.c ^ n.d,

och .... m.e ^ n.f ,

samt alltså m (a + c -f e) ^> n. (b + d + f). På samma sätt blifver det tydligt, att om

m.a = eller ^ n.b ; så måste m.(a + c -f e) = eller ^ n. (b + d + f).

Bevis. Ty icke är a^b; emedan då

c:b ^> c:a..................8 pr. 5.

icke heller är a <^ b, emedan då

c:a > c:b..................8 pr. 5.

Derföre måste a = b; h. s b.

X. Proposition. Theorem*

Af storheter , som hafva förhållande till en och samma, är den större., som har ett större förhållande ; men den, till hvilken en och samma 'har ett större förhållande, är mindre.

l:o Om

b:c; så skall a b.

Bevis. Ty hvarken kan a - b, eller a <^ b; emedan i förra fallet skulle a:cr=^b:c. . . 7 pr. 5. och i sednare fallet skulle b;c ^ a:c, eller

a:c <^ b:c .... 8 pr. 5.

Således måste . . a ^ b, h. s. b.

2:o Om , .

c;a; så skall b <^ a,

Bevis. Ty hvarken kan b=a, eller b> a; emedan i förra fallet skulle c:b - c:a . . 7 pr. 5. och i sednare fallet skulle . c:a^c:b, eller

c:b «^c:a. . . 8 pr. 5.

XI Proposition» Theorem.

De förhållanden., som äro lika med ett

och samma > äro sinsimellan lika,

Om......a:b -c:d,

och........c:d - e:f;

så skall......a:b=e:f.

Bevis. Emedanarb = c:d; så måste

m.a ^ - <^ n.b

allteftersom . , m.c ^ - <^n.d;.....5 def. 5.

och emedan .... c;d = e:f; så måste

m.c ^ = ^ n.d

allteftersom . . m.e ^ = <^ n.f......5 def. 5.

Derföre måste m.a ^ = <^ n.b allteftersom . . m.e ^ == <^ n.f och således . , . . a:b = e:f, h. s. b. . . 5 def. 5.

Proposition. Theorem.

Om storheter, ehuru många de vårarna, äro proportionella, och alla af samma slag; så är summan af alla de föregående till summan af alla de efterföljande, som hvarje föregående till sin efterföljande.

Om såskall

z^ c:d - e:f;

= a:b = c;d ^ e:ff

Bevis. Ty efter a:b = c:d=re:f5 så måste, om .... m.a ^ n.b,

äfven .... m.c ^ n.d,

och .... m.e ^ n.f ,

samt alltså m (a + c -f e) ^> n. (b + d + f). På samma sätt blifver det tydligt, att om

m.a = eller ^ n.b ; så måste m.(a + c -f e) = eller ^ n. (b + d + f). 142

Bevis. Ty icke är a^b; emedan då

c:b ^> c:a.................8 pr. 5.

icke heller är a <^ b, emedan då

c:a > c:b.................8 pr. 5.

Derföre måste a = b; h. s b.

X. Proposition. Theorem*

Af storheter , som hafva förhållande till en och samma, är den större., som har ett större förhållande ; men den, till hvilken en och samma 'har ett större förhållande, är mindre.

l:o Om

b:c; så skall a b.

Bevis. Ty hvarken kan a - b, eller a <^ b; emedan i förra fallet skulle a:cr=^b:c. . . 7 pr. 5. och i sednare fallet skulle b;c ^ a:c, eller

a:c <^ b:c .... 8 pr. 5.

Således måste . . a ^ b, h. s. b.

2:o Om , .

c;a; så skall b <^ a,

Bevis. Ty hvarken kan b=a, eller b> a; emedan i förra fallet skulle c:b - c:a . . 7 pr. 5. och i sednare fallet skulle . c:a^c:b, eller

c:b «^c:a. . . 8 pr. 5.

XI Proposition» Theorem.

De förhållanden., som äro lika med ett

och samma > äro sinsimellan lika,

Om......a:b -c:d,

och........c:d - e:f;

så skall......a:b=e:f.

Bevis. Emedanarb = c:d; så måste

m.a ^ - <^ n.b

allteftersom . , m.c ^ - <^n.d;.....5 def. 5.

och emedan .... c;d = e:f; så måste

m.c ^ = ^ n.d

allteftersom . . m.e ^ = <^ n.f......5 def. 5.

Derföre måste m.a ^ = <^ n.b allteftersom . . m.e ^ == <^ n.f och således . , . . a:b = e:f, h. s. b. . . 5 def. 5.

Proposition. Theorem.

Om storheter, ehuru många de vårarna, äro proportionella, och alla af samma slag; så är summan af alla de föregående till summan af alla de efterföljande, som hvarje föregående till sin efterföljande.

Om såskall

z^ c:d - e:f;

= a:b = c;d ^ e:ff

Bevis. Ty efter a:b = c:d=re:f5 så måste, om .... m.a ^ n.b,

äfven .... m.c ^ n.d,

och .... m.e ^ n.f ,

samt alltså m (a + c -f e) ^> n. (b + d + f). På samma sätt blifver det tydligt, att om

m.a = eller ^ n.b ; så måste m.(a + c -f e) = eller ^ n. (b + d + f).144

När således m.(a+c + e)> = < n.(b 4 d + f) allteftersom . . . m.a "> = ^ n.b;

så måste a -f c + e:b + d + f == a:b.....5 def, 5.

och alltså a-f-c + e:b4d ff ~ a:b = c.d = e:f,h.s.b. 11 pr. 5.

HLIII Proposition. Theorem*

Om tvänne förhållanden äro lika, och det ena af dem är större, än ett tredje forhållande; sa skall äfven det andra vara större än detta samma tredje forhållande.

Om . . . a:b = c:d

och......c;d ^. e:f;

så skall äfven a:b = e:f.

Bevis. Ty efter c:d > e:f, så måste det finnas sådana mångfaldiga, som göra m.c ^ n.d,

under det att m.e = <^ n.f........7 def. 5.

men då ... m.c ^ n.d

så måste . . . m.a ^ n.b.........5 def. 5.

emedan . . . a:b = c:d; således finnas sådana numertal m, n, som göra

m.a ^ n.b

under det . . m.e = <\ n4f, hvadan . . . a:b ^ e:f, h. s. b. . . . 4 7 def. 5.

XIV Proposition. Theorem.

Om fyra storheter äro proportionella, och alla af samma slag; så skall den första vara

större, lika stor med, eller mindre än den tredje, allteftersom den andra är större, lika stor med, eller mindre än den fjerde.

Om.......a:b = c:d;

så skall.......a^^z^c

allteftersom.....b ^> = ^ d.

Bevis. Låt först a ^ c;

så måste......a:b ^» c:b;......8 pr. 5.

men......... a:b = c:d,

derföre måste . . . c:d ^ c:b......13 pr. 5.

och således är .... d <^ b ......10 pr. 5.

eller..........b ^ d, h. s. b.

På lika sätt bevises, att om a = c; så är b ~ d, och att om a <^ c; så är b ^ d.

Proposition. Theorem.

Storheter hafva samma förhållande till hvarandra, som deras lika mångfaldiga.

Det skall bevisas, att a:b - p.arp.b.

Bevis, Det är nämligen klart, att

a:b -=- a:b = a:b , o. s. v.,

hvadan a -f a -f- a + etc. :b -f b 4 b + etc. = a;b 12pr.5. d, v. s. p.a:p.b ~ a:b5 eller a:b = p.a:p.b, h. s. b.

XVI Proposition. Theorem.

Om fyra storheter, alla af samma slag, äro proportionella; så äro de äfven proportionella, om de vexlas om. 144

När således m.(a+c + e)> = < n.(b 4 d + f) allteftersom . . . m.a "> = ^ n.b;

så måste a -f c + e:b + d + f == a:b.....5 def, 5.

och alltså a-f-c + e:b4d ff ~ a:b = c.d = e:f,h.s.b. 11 pr. 5.

HLIII Proposition. Theorem*

Om tvänne förhållanden äro lika, och det ena af dem är större, än ett tredje forhållande; sa skall äfven det andra vara större än detta samma tredje forhållande.

Om . . . a:b = c:d

och......c;d ^. e:f;

så skall äfven a:b = e:f.

Bevis. Ty efter c:d > e:f, så måste det finnas sådana mångfaldiga, som göra m.c ^ n.d,

under det att m.e = <^ n.f........7 def. 5.

men då ... m.c ^ n.d

så måste . . . m.a ^ n.b.........5 def. 5.

emedan . . . a:b = c:d; således finnas sådana numertal m, n, som göra

m.a ^ n.b

under det . . m.e = <\ n4f, hvadan . . . a:b ^ e:f, h. s. b. . . . 4 7 def. 5.

XIV Proposition. Theorem.

Om fyra storheter äro proportionella, och alla af samma slag; så skall den första vara

större, lika stor med, eller mindre än den tredje, allteftersom den andra är större, lika stor med, eller mindre än den fjerde.

Om.......a:b = c:d;

så skall.......a^^z^c

allteftersom.....b ^> = ^ d.

Bevis. Låt först a ^ c;

så måste......a:b ^» c:b;......8 pr. 5.

men......... a:b = c:d,

derföre måste . . . c:d ^ c:b......13 pr. 5.

och således är .... d <^ b ......10 pr. 5.

eller..........b ^ d, h. s. b.

På lika sätt bevises, att om a = c; så är b ~ d, och att om a <^ c; så är b ^ d.

Proposition. Theorem.

Storheter hafva samma förhållande till hvarandra, som deras lika mångfaldiga.

Det skall bevisas, att a:b - p.arp.b.

Bevis, Det är nämligen klart, att

a:b -=- a:b = a:b , o. s. v.,

hvadan a -f a -f- a + etc. :b -f b 4 b + etc. = a;b 12pr.5. d, v. s. p.a:p.b ~ a:b5 eller a:b = p.a:p.b, h. s. b.

XVI Proposition. Theorem.

Om fyra storheter, alla af samma slag, äro proportionella; så äro de äfven proportionella, om de vexlas om.

När således m.(a+c + e)> = < n.(b 4 d + f) allteftersom . . . m.a "> = ^ n.b;

så måste a -f c + e:b + d + f == a:b.....5 def, 5.

och alltså a-f-c + e:b4d ff ~ a:b = c.d = e:f,h.s.b. 11 pr. 5.

HLIII Proposition. Theorem*

Om tvänne förhållanden äro lika, och det ena af dem är större, än ett tredje forhållande; sa skall äfven det andra vara större än detta samma tredje forhållande.

Om . . . a:b = c:d

och......c;d ^. e:f;

så skall äfven a:b = e:f.

Bevis. Ty efter c:d > e:f, så måste det finnas sådana mångfaldiga, som göra m.c ^ n.d,

under det att m.e = <^ n.f........7 def. 5.

men då ... m.c ^ n.d

så måste . . . m.a ^ n.b.........5 def. 5.

emedan . . . a:b = c:d; således finnas sådana numertal m, n, som göra

m.a ^ n.b

under det . . m.e = <\ n4f, hvadan . . . a:b ^ e:f, h. s. b. . . . 4 7 def. 5.

XIV Proposition. Theorem.

Om fyra storheter äro proportionella, och alla af samma slag; så skall den första vara

större, lika stor med, eller mindre än den tredje, allteftersom den andra är större, lika stor med, eller mindre än den fjerde.

Om.......a:b = c:d;

så skall.......a^^z^c

allteftersom.....b ^> = ^ d.

Bevis. Låt först a ^ c;

så måste......a:b ^» c:b;......8 pr. 5.

men......... a:b = c:d,

derföre måste . . . c:d ^ c:b......13 pr. 5.

och således är .... d <^ b ......10 pr. 5.

eller..........b ^ d, h. s. b.

På lika sätt bevises, att om a = c; så är b ~ d, och att om a <^ c; så är b ^ d.

Proposition. Theorem.

Storheter hafva samma förhållande till hvarandra, som deras lika mångfaldiga.

Det skall bevisas, att a:b - p.arp.b.

Bevis, Det är nämligen klart, att

a:b -=- a:b = a:b , o. s. v.,

hvadan a -f a -f- a + etc. :b -f b 4 b + etc. = a;b 12pr.5. d, v. s. p.a:p.b ~ a:b5 eller a:b = p.a:p.b, h. s. b.

XVI Proposition. Theorem.

Om fyra storheter, alla af samma slag, äro proportionella; så äro de äfven proportionella, om de vexlas om. 144

Femte Boken.

När således m.(a+c + e)> = < n.(b 4 d + f) allteftersom . . . m.a "> = ^ n.b;

så måste a -f c + e:b + d + f == a:b.....5 def, 5.

och alltså a-f-c + e:b4d ff ~ a:b = c.d = e:f,h.s.b. 11 pr. 5.

HLIII Proposition. Theorem*

Om tvänne förhållanden äro lika, och det ena af dem är större, än ett tredje forhållande; sa skall äfven det andra vara större än detta samma tredje forhållande.

Om . . . a:b = c:d

och......c;d ^. e:f;

så skall äfven a:b = e:f.

Bevis. Ty efter c:d > e:f, så måste det finnas sådana mångfaldiga, som göra m.c ^ n.d,

under det att m.e = <^ n.f........7 def. 5.

men då ... m.c ^ n.d

så måste . . . m.a ^ n.b.........5 def. 5.

emedan . . . a:b = c:d; således finnas sådana numertal m, n, som göra

m.a ^ n.b

under det . . m.e = <\ n4f, hvadan . . . a:b ^ e:f, h. s. b. . . . 4 7 def. 5.

XIV Proposition. Theorem.

Om fyra storheter äro proportionella, och alla af samma slag; så skall den första vara

större, lika stor med, eller mindre än den tredje, allteftersom den andra är större, lika stor med, eller mindre än den fjerde.

Om.......a:b = c:d;

så skall.......a^^z^c

allteftersom.....b ^> = ^ d.

Bevis. Låt först a ^ c;

så måste......a:b ^» c:b;......8 pr. 5.

men......... a:b = c:d,

derföre måste . . . c:d ^ c:b......13 pr. 5.

och således är .... d <^ b ......10 pr. 5.

eller..........b ^ d, h. s. b.

På lika sätt bevises, att om a = c; så är b ~ d, och att om a <^ c; så är b ^ d.

Proposition. Theorem.

Storheter hafva samma förhållande till hvarandra, som deras lika mångfaldiga.

Det skall bevisas, att a:b - p.arp.b.

Bevis, Det är nämligen klart, att

a:b -=- a:b = a:b , o. s. v.,

hvadan a -f a -f- a + etc. :b -f b 4 b + etc. = a;b 12pr.5. d, v. s. p.a:p.b ~ a:b5 eller a:b = p.a:p.b, h. s. b.

XVI Proposition. Theorem.

Om fyra storheter, alla af samma slag, äro proportionella; så äro de äfven proportionella, om de vexlas om.

När således m.(a+c + e)> = < n.(b 4 d + f) allteftersom . . . m.a "> = ^ n.b;

så måste a -f c + e:b + d + f == a:b.....5 def, 5.

och alltså a-f-c + e:b4d ff ~ a:b = c.d = e:f,h.s.b. 11 pr. 5.

HLIII Proposition. Theorem*

Om tvänne förhållanden äro lika, och det ena af dem är större, än ett tredje forhållande; sa skall äfven det andra vara större än detta samma tredje forhållande.

Om . . . a:b = c:d

och......c;d ^. e:f;

så skall äfven a:b = e:f.

Bevis. Ty efter c:d > e:f, så måste det finnas sådana mångfaldiga, som göra m.c ^ n.d,

under det att m.e = <^ n.f........7 def. 5.

men då ... m.c ^ n.d

så måste . . . m.a ^ n.b.........5 def. 5.

emedan . . . a:b = c:d; således finnas sådana numertal m, n, som göra

m.a ^ n.b

under det . . m.e = <\ n4f, hvadan . . . a:b ^ e:f, h. s. b. . . . 4 7 def. 5.

XIV Proposition. Theorem.

Om fyra storheter äro proportionella, och alla af samma slag; så skall den första vara

större, lika stor med, eller mindre än den tredje, allteftersom den andra är större, lika stor med, eller mindre än den fjerde.

Om.......a:b = c:d;

så skall.......a^^z^c

allteftersom.....b ^> = ^ d.

Bevis. Låt först a ^ c;

så måste......a:b ^» c:b;......8 pr. 5.

men......... a:b = c:d,

derföre måste . . . c:d ^ c:b......13 pr. 5.

och således är .... d <^ b ......10 pr. 5.

eller..........b ^ d, h. s. b.

På lika sätt bevises, att om a = c; så är b ~ d, och att om a <^ c; så är b ^ d.

Proposition. Theorem.

Storheter hafva samma förhållande till hvarandra, som deras lika mångfaldiga.

Det skall bevisas, att a:b - p.arp.b.

Bevis, Det är nämligen klart, att

a:b -=- a:b = a:b , o. s. v.,

hvadan a -f a -f- a + etc. :b -f b 4 b + etc. = a;b 12pr.5. d, v. s. p.a:p.b ~ a:b5 eller a:b = p.a:p.b, h. s. b.

XVI Proposition. Theorem.

Om fyra storheter, alla af samma slag, äro proportionella; så äro de äfven proportionella, om de vexlas om.

Örn så skall

a:b = c:d a:c = b:d.

Bevis. Ty efter a:b = c;d så måste .... m.a:m.b = n.c:n.d . . och derför måste m.a ^ ~ <^ n.c allteftersom . . . m.b ^ = ^ n.d . . hvadan........a:c = b:d, h. s. b. 5 def. 5. \

15 pr. 5. 14 pr. 5.

Theorem le

öm fyra storheter äro proportionella, och alla af samma slag; samt den första är mångfaldig af den tredje; så skall den andra vara lika mångfaldig af den fjerde, som den förslå är af den tredje.

Om .... a:b = c:d

och.......... a = m.c; så skall b -m.d.

Bevis. Ty efter a:b = c:d; -så måste .... a:c = b:d;

och efter det nu är antaget, att a har ett sådant förhållande till c, att a =. m.c; så måste äfven b

hafva till d ett sådant förhållande, att b h. s. b.

Theorem

m.d,

Om fyra storheter äro proportionella, så skall den första vara större, lika stor med, eller mindre än den andra, allteftersom den tredje är större, lika stor med, eller mindre an den fjerde.

Om........a:b = c:d;

så skall.......a > = < b,

allteftersom.....c ^ = <^ d.

Bevis. Ty efter a:b--c:d;

så måste......m«a ^ = ^. n.b

allteftersom .... m.c ^ = ^ n.d ... 5 def. 5. och emedan detta måste ega rum för hvilka hela numertal som heldst; så måste det äfven inträffa, om man antager

m -n = 1;

hvilket gifver .... a ^ = <^ b allteftersom.....c "^ - ^ d, h. s, b.

XVII Proposition» Theorem.

Om fyra storheter äro proportionella, så folklif va de af nen proportionella, om de sam-mansättas.

Om så skall

i . a:b = c:d, a +b:b ±= c -f d:d.

Bevis. Ty efter a:b

så måste......m.a ^>

allteftersom och således allteftersom d. v. s. att allteftersom hvadan . . .

. . . . m.c m.a -f m.b ^ m.c -f m.d ^ m.(a * b) > m.(c + d) > ... a + b:b

c:d5 <n.b

< n.d

< n.b

5 def. 5. 2&4ax.

< (n + m).d;

c -f d:d,h. s b. 5def.5. 146

Örn så skall

Femte Boken.

a:b = c:d a:c = b:d.

Bevis. Ty efter a:b = c;d så måste .... m.a:m.b = n.c:n.d . . och derför måste m.a ^ ~ <^ n.c allteftersom . . . m.b ^ = ^ n.d . . hvadan........a:c = b:d, h. s. b. 5 def. 5. \

15 pr. 5. 14 pr. 5.

Theorem le

öm fyra storheter äro proportionella, och alla af samma slag; samt den första är mångfaldig af den tredje; så skall den andra vara lika mångfaldig af den fjerde, som den förslå är af den tredje.

Om .... a:b = c:d

och.......... a = m.c; så skall b -m.d.

Bevis. Ty efter a:b = c:d; -så måste .... a:c = b:d;

och efter det nu är antaget, att a har ett sådant förhållande till c, att a =. m.c; så måste äfven b

hafva till d ett sådant förhållande, att b h. s. b.

Theorem

m.d,

Om fyra storheter äro proportionella, så skall den första vara större, lika stor med, eller mindre än den andra, allteftersom den tredje är större, lika stor med, eller mindre an den fjerde.

Om........a:b = c:d;

så skall.......a > = < b,

allteftersom.....c ^ = <^ d.

Bevis. Ty efter a:b--c:d;

så måste......m«a ^ = ^. n.b

allteftersom .... m.c ^ = ^ n.d ... 5 def. 5. och emedan detta måste ega rum för hvilka hela numertal som heldst; så måste det äfven inträffa, om man antager

m -n = 1;

hvilket gifver .... a ^ = <^ b allteftersom.....c "^ - ^ d, h. s, b.

XVII Proposition» Theorem.

Om fyra storheter äro proportionella, så folklif va de af nen proportionella, om de sam-mansättas.

Om så skall

i . a:b = c:d, a +b:b ±= c -f d:d.

Bevis. Ty efter a:b

så måste......m.a ^>

allteftersom och således allteftersom d. v. s. att allteftersom hvadan . . .

. . . . m.c m.a -f m.b ^ m.c -f m.d ^ m.(a * b) > m.(c + d) > ... a + b:b

c:d5 <n.b

< n.d

< n.b

5 def. 5. 2&4ax.

< (n + m).d;

c -f d:d,h. s b. 5def.5. 148 Femte Boken.

XVIII Proposition. Theorem.

Om fyra storheter äro proportionella, så förblifva de öfven proportionella, om de fördelas.

Om så skall

. a:b = c:d; a-b:b = c-d:d.

Beviset är lika med nästföregående bevis, endast man utbyter tecknet + mot tecknet ~, och åberopar 3:dje och 5:te axiomen, i stället for 2:dra och 4:de.'

Proposition. Theorem.

Om f yra storheter, alla af samma slag, äro proportionella, så förhåller sig skillnaden mellan de föregående till skillnaden mellan de efterföljande, som en föregående till sin efterföljande.

Om .... a;b = c:d

så skall , . . . a-c:b-d = a:b. Bevis. Emedan -a:b=c*.d, så måste . . .. a:c = b:d .'.... 16 pr. 5.

och .... a-c:c = b-d:d ... 18 pr. 5.

samt slutligen . a-c:b-d - c:d .... 16 pr. 5.

eller . ... a-c:b-d = a:b h. s. b. 11 pr. 5.

Theorem !.

Om tvänne förhållande äro lika, så förblifva de äfven lika, om de inverteras.

Om

skall

a:b - c:d; bra = d:c.

Bevis. Emedan a:b = c:d,

så måste..... m.a ^ = <^ n.b,

allteftersom . . . m.c ^ = <^ n.d . . . 5 def. 5. d. v. s. att ... n.b "> = «^ m.a, allteftersom. . . n.d ^ - <^ m.c; hvaraf följer, att b:a = d:c, h. s. b. . 5 def. 5.

Theorem 9.

Om fyra storheter äro proportionella, så äro de äfven proportionella, om de converteras.

Om.......a;b = c:d,

så skall......a:a-b = c:c-d.

Bevis. Ty efter a:b = c:d

så måste......a-b:b =. c-d:d .... 18 pr. 5.

och om man inverterar ....'...". b:a-b = d:c-d samt, om man sammansätter storheterna ......b + a-b:a-b = d + c-d:c~d, 17 pr. 5.

d. v. s......a:a-b = c:c-d, h. s. b.

Proposition. Theorem.

Om sex storheter äro proportionella i ordning^ så skall den första vara större, lika 148 Femte Boken.

XVIII Proposition. Theorem.

Om fyra storheter äro proportionella, så förblifva de öfven proportionella, om de fördelas.

Om så skall

. a:b = c:d; a-b:b = c-d:d.

Beviset är lika med nästföregående bevis, endast man utbyter tecknet + mot tecknet ~, och åberopar 3:dje och 5:te axiomen, i stället for 2:dra och 4:de.'

Proposition. Theorem.

Om f yra storheter, alla af samma slag, äro proportionella, så förhåller sig skillnaden mellan de föregående till skillnaden mellan de efterföljande, som en föregående till sin efterföljande.

Om .... a;b = c:d

så skall , . . . a-c:b-d = a:b. Bevis. Emedan -a:b=c*.d, så måste . . .. a:c = b:d .'.... 16 pr. 5.

och .... a-c:c = b-d:d ... 18 pr. 5.

samt slutligen . a-c:b-d - c:d .... 16 pr. 5.

eller . ... a-c:b-d = a:b h. s. b. 11 pr. 5.

Theorem !.

Om tvänne förhållande äro lika, så förblifva de äfven lika, om de inverteras.

Om

skall

a:b - c:d; bra = d:c.

Bevis. Emedan a:b = c:d,

så måste..... m.a ^ = <^ n.b,

allteftersom . . . m.c ^ = <^ n.d . . . 5 def. 5. d. v. s. att ... n.b "> = «^ m.a, allteftersom. . . n.d ^ - <^ m.c; hvaraf följer, att b:a = d:c, h. s. b. . 5 def. 5.

Theorem 9.

Om fyra storheter äro proportionella, så äro de äfven proportionella, om de converteras.

Om.......a;b = c:d,

så skall......a:a-b = c:c-d.

Bevis. Ty efter a:b = c:d

så måste......a-b:b =. c-d:d .... 18 pr. 5.

och om man inverterar ....'...". b:a-b = d:c-d samt, om man sammansätter storheterna ......b + a-b:a-b = d + c-d:c~d, 17 pr. 5.

d. v. s......a:a-b = c:c-d, h. s. b.

Proposition. Theorem.

Om sex storheter äro proportionella i ordning^ så skall den första vara större, lika 148 Femte Boken.

XVIII Proposition. Theorem.

Om fyra storheter äro proportionella, så förblifva de öfven proportionella, om de fördelas.

Om så skall

. a:b = c:d; a-b:b = c-d:d.

Beviset är lika med nästföregående bevis, endast man utbyter tecknet + mot tecknet ~, och åberopar 3:dje och 5:te axiomen, i stället for 2:dra och 4:de.'

Proposition. Theorem.

Om f yra storheter, alla af samma slag, äro proportionella, så förhåller sig skillnaden mellan de föregående till skillnaden mellan de efterföljande, som en föregående till sin efterföljande.

Om .... a;b = c:d

så skall , . . . a-c:b-d = a:b. Bevis. Emedan -a:b=c*.d, så måste . . .. a:c = b:d .'.... 16 pr. 5.

och .... a-c:c = b-d:d ... 18 pr. 5.

samt slutligen . a-c:b-d - c:d .... 16 pr. 5.

eller . ... a-c:b-d = a:b h. s. b. 11 pr. 5.

Theorem !.

Om tvänne förhållande äro lika, så förblifva de äfven lika, om de inverteras.

Femte Boken.

149

Om

skall

a:b - c:d; bra = d:c.

Bevis. Emedan a:b = c:d,

så måste..... m.a ^ = <^ n.b,

allteftersom . . . m.c ^ = <^ n.d . . . 5 def. 5. d. v. s. att ... n.b "> = «^ m.a, allteftersom. . . n.d ^ - <^ m.c; hvaraf följer, att b:a = d:c, h. s. b. . 5 def. 5.

Theorem 9.

Om fyra storheter äro proportionella, så äro de äfven proportionella, om de converteras.

Om.......a;b = c:d,

så skall......a:a-b = c:c-d.

Bevis. Ty efter a:b = c:d

så måste......a-b:b =. c-d:d .... 18 pr. 5.

och om man inverterar ....'...". b:a-b = d:c-d samt, om man sammansätter storheterna ......b + a-b:a-b = d + c-

d:c~d, 17 pr. 5.

d. v. s......a:a-b = c:c-d, h. s. b.

Proposition. Theorem.

Om sex storheter äro proportionella i ordning^ så skall den första vara större, lika150

stor med, eller mindre än den tredje, allteftersom den fjerde är större, lika stor med, eller mindre än den sjette.

Gm A, B, C och a, b, c äro proportionella i ordning, så att

A:B = a:b

. A> =

c;

så skall .. allteftersom

Bevis. Ty låt först .... a^

så måste ..... a:b^ c:b; ...... 8 pr. 5.

men, enl. hypoth. a:b - A:B,

och .... c:b = C:B; ..... Theor. näst

eft. 19 pr. 5. derföre måste, A:B>C:B ...... 13 pr. 5.

samt således . . A>C; h. s. b. . . 10 pr. 5.

På samma sätt bevises, att, om a = c, så är -A = C, och att om a <^ c; så är A <^ C, h. s. b.

XXI Proposition. Theorem.

Om sex storheter äro proportionella utan ordning; sä skall den f Sr sta vara större, lika stor med, eller mindre än den tredje, allteftersom den fjerde är större, lika stor med, eller mindre än den fjerde.

Om A, B, C, och a, b, c äro proportionella utan ordning; så att

 A:B = b:c,

så skall......A > - < C,

allteftersom. . . . a^> = <^c;

hvilket bevises, såsom nästforeg. proposition.

XXII oeli XXIII Proposition. Tlieor.

Om tvänne förhållanden sammansättas, och tvänne förhållanden, som äro lika med hvcw sitt bland dem, äfven sammansättas; så skola dessa sammansatta förhållanden värn sinsimellan lika stora.

Om

och .. .. B:C~b:c;

så är förhållandet A:C sammansatt af A:B och af B:C; samt förhållandet a:c sammansatt af a:b och af b:c 18def.5;

det skall då bevisas, att A:C = a:c.

Bevis. Ty efter A:B = a:b och .... B:C=:b:c;

så måste ..... m.Arn.B m m.arn.b

och .... n.B:n.C = n.b:n.c

Derföre måste . . m.A ^> =2 <^ n.C

allteftersom . . . m.a ^> = ^ n.c . . . . 20 pr. 5.

och alltså ...... A:C = a:c; h. s. b. 5def.5.

. 4 pr. 5.

. 15 pr. 5,

Skulle de sex storheterna A, B, C, och a, &, c vara proportionella utan ordning ; så att A:B zz b:c B:C = a:b;

så skall äfven i denna händelse 4:C=a:c.

stor med, eller mindre än den tredje, allteftersom den fjerde är större, lika stor med, eller mindre än den sjette.

Gm A, B, C och a, b, c äro proportionella i ordning, så att

A:B = a:b

. A> =

c;

så skall .. allteftersom

Bevis. Ty låt först .... a^

så måste ..... a:b^ c:b; ...... 8 pr. 5.

men, enl. hypoth. a:b - A:B,

och .... c:b = C:B; ..... Theor. näst

eft. 19 pr. 5. derföre måste, A:B>C:B ...... 13 pr. 5.

samt således . . A>C; h. s. b. . . 10 pr. 5.

På samma sätt bevises, att, om a = c, så är -A = C, och att om a <^ c; så är A <^ C, h. s. b.

XXI Proposition. Theorem.

Om sex storheter äro proportionella utan ordning; sä skall den f Sr sta vara större, lika stor med, eller mindre än den tredje, allteftersom den fjerde är större, lika stor med, eller mindre än den fjerde.

Om A, B, C, och a, b, c äro proportionella utan ordning; så att

 A:B = b:c,

så skall......A > - < C,

allteftersom. . . . a^> = <^c;

hvilket bevises, såsom nästforeg. proposition.

XXII oeli XXIII Proposition. Tlieor.

Om tvänne förhållanden sammansättas, och tvänne förhållanden, som äro lika med hvcw sitt bland dem, äfven sammansättas; så skola dessa sammansatta förhållanden värn sinsimellan lika stora.

Om

och .. .. B:C~b:c;

så är förhållandet A:C sammansatt af A:B och af B:C; samt förhållandet a:c sammansatt af a:b och af b:c 18def.5;

det skall då bevisas, att A:C = a:c.

Bevis. Ty efter A:B = a:b och .... B:C=:b:c;

så måste ..... m.Arn.B m m.arn.b

och .... n.B:n.C = n.b:n.c

Derföre måste . . m.A ^> =2 <^ n.C

allteftersom . . . m.a ^> = ^ n.c . . . . 20 pr. 5.

och alltså ...... A:C = a:c; h. s. b. 5def.5.

. 4 pr. 5.

. 15 pr. 5,

Skulle de sex storheterna A, B, C, och a, &, c vara proportionella utan ordning ; så att A:B zz b:c B:C = a:b;

så skall äfven i denna händelse 4:C=a:c.

stor med, eller mindre än den tredje, allteftersom den fjerde är större, lika stor med, eller mindre än den sjette.

Gm A, B, C och a, b, c äro proportionella i ordning, så att

A:B = a:b

. A> =

c;

så skall .. allteftersom

Bevis. Ty låt först .... a^

så måste ..... a:b^ c:b; ...... 8 pr. 5.

men, enl. hypoth. a:b - A:B,

och .... c:b = C:B; ..... Theor. näst

eft. 19 pr. 5. derföre måste, A:B>C:B ...... 13 pr. 5.

samt således . . A>C; h. s. b. . . 10 pr. 5.

På samma sätt bevises, att, om a = c, så är -A = C, och att om a <^ c; så är A <^ C, h. s. b.

XXI Proposition. Theorem.

Om sex storheter äro proportionella utan ordning; sä skall den f Sr sta vara större, lika stor med, eller mindre än den tredje, allteftersom den fjerde är större, lika stor med, eller mindre än den fjerde.

Om A, B, C, och a, b, c äro proportionella utan ordning; så att

 A:B = b:c,

så skall......A > - < C,

allteftersom. . . . a^> = <^c;

hvilket bevises, såsom nästforeg. proposition.

XXII oeli XXIII Proposition. Tlieor.

Om tvänne förhållanden sammansättas, och tvänne förhållanden, som äro lika med hvcw sitt bland dem, äfven sammansättas; så skola dessa sammansatta förhållanden värn sinsimellan lika stora.

Om

och .. .. B:C~b:c;

så är förhållandet A:C sammansatt af A:B och af B:C; samt förhållandet a:c sammansatt af a:b och af b:c 18def.5;

det skall då bevisas, att A:C = a:c.

Bevis. Ty efter A:B = a:b och .... B:C=:b:c;

så måste ..... m.Arn.B m m.arn.b

och .... n.B:n.C = n.b:n.c

Derföre måste . . m.A ^> =2 <^ n.C

allteftersom . . . m.a ^> = ^ n.c . . . . 20 pr. 5.

och alltså ...... A:C = a:c; h. s. b. 5def.5.

. 4 pr. 5.

. 15 pr. 5,

Skulle de sex storheterna A, B, C, och a, &, c vara proportionella utan ordning ; så att A:B zz b:c B:C = a:b;

så skall äfven i denna händelse 4:C=a:c.

11152

Ty efter ....

och.......

så måste . . . .

och.......

Derföre måste, allteftersom

. . . A:B = b:c, . . . B:C~a:b; m.A:m.B = nJbin.c . m.B:n,C = m.a:n,c . m. A > = < n C m.a^> = <^.n.c

och alltså ...... A:C = a:c, h. s. b.

15 pr. 5. 4 pr. 5.

21 pr. 5. 4def.5.

XXIV Proposition* Theorem.

Om fyra, storheter äro proportionella, och en femte förhåller sig till den andra, som en Sjette till den fjerde; så .skall den första och femte tillsammanstagna förhålla sig till den andra, som den tredje och sjette tillsammanstagna förhålla sig till den fjerde.

Om .... a:b= c:d,

och .... e:b - f:d ;

så skall ...... a -H e:b - c + f:d.

Bevis. Tyemedana:b = c:d och .... , e:b = ful,

så måste .... a:b = c:d

och .... b:ezzd:f

samt således ..... a:e - c:f

Theor. eft.4pr.5. . 22 pr. 5.

och .... a + e:e - c + f:f . . . . 17 pr. 5.

Men, enligt hypoth. e:b=zf:d;

således måste . . a -f e:b = c 4 ful, h. s. b. 22 pr. 5.

Proposition. Theorem.

Om fyra storheter äro proportionella, sä är summan ftf den största och minsta större, än summan af de båda öfriga.

Om.......a:b = .c:d,

och a är störst, så måste d vara minst, enligt 14 pr. 5 och 2 Theor. efter den 16 pr. 5: det skall bevisas, att

a + d ^ b -f- c.

Bevis, så måste . . .

och......

men nu är c derföre måste

och således , samt.....

Ty då

a:b = cul

a:c = b:d......16 pr. 5.

. , a-c:c = b-d;d .... 18 pr. 5. d; emedan d är minst; . . a-c>b-d . . . 2Theor.eft.

den 16 pr 5. . . . . a > b .». c-d . a + d S> b + c, h. s. b. 4 ax.

Proposition. Problem.

Låt a, b, c, d vara fyra numertal, att sammansätta det förhållande som a har till b, med det, som c har till d.

Emedan . . . a:b = a.crb.c, och .... c:d = b.c:b.d; ...... 15 pr. 5.

så måste män erhålla samma resultat, om man sammansätter a:b med c:d, som om man sammansätter a.crb.c med b.c:b.d, 22 prop. 5; men denna sednare sammansättning gifver a.crb.d, 18 def. 5; alltså måste äfven a.c:b.d vara det förhållande, som är sammansatt af a:b och c:d; d. v. s.

c:

= a.c:b.d,. 5

18 def. 5.

På samma sätt kan man bevisa, att det förhållande, som är sammansatt af a:b, af c:d och af e:f, måste vara a.c.e:b.d.f; eller att

Ty efter ....

och.......

så måste . . . .

och.......

Derföre måste, allteftersom

. . . A:B = b:c, . . . B:C~a:b; m.A:m.B = nJbin.c . m.B:n,C = m.a:n,c . m. A > = < n C m.a^> = <^.n.c

och alltså ...... A:C = a:c, h. s. b.

15 pr. 5. 4 pr. 5.

21 pr. 5. 4def.5.

XXIV Proposition* Theorem.

Om fyra, storheter äro proportionella, och en femte förhåller sig till den andra, som en Sjette till den fjerde; så .skall den första och femte tillsammanstagna förhålla sig till den andra, som den tredje och sjette tillsammanstagna förhålla sig till den fjerde.

Om .... a:b= c:d,

och .... e:b - f:d ;

så skall ...... a -H e:b - c + f:d.

Bevis. Tyemedana:b = c:d och .... , e:b = ful,

så måste .... a:b = c:d

och .... b:ezzd:f

samt således ..... a:e - c:f

Theor. eft.4pr.5. . 22 pr. 5.

och .... a + e:e - c + f:f . . . . 17 pr. 5.

Men, enligt hypoth. e:b=zf:d;

således måste . . a -f e:b = c 4 ful, h. s. b. 22 pr. 5.

Proposition. Theorem.

Om fyra storheter äro proportionella, sä är summan ftf den största och minsta större, än summan af de båda öfriga.

Om.......a:b = .c:d,

och a är störst, så måste d vara minst, enligt 14 pr. 5 och 2 Theor. efter den 16 pr. 5: det skall bevisas, att

a + d ^ b -f- c.

Bevis, så måste . . .

och......

men nu är c derföre måste

och således , samt.....

Ty då

a:b = cul

a:c = b:d......16 pr. 5.

. , a-c:c = b-d;d .... 18 pr. 5. d; emedan d är minst; . . a-c>b-d . . . 2Theor.eft.

den 16 pr 5. . . . . a > b .». c-d . a + d S> b + c, h. s. b. 4 ax.

Proposition. Problem.

Låt a, b, c, d vara fyra numertal, att sammansätta det förhållande som a har till b, med det, som c har till d.

Emedan . . . a:b = a.crb.c, och .... c:d = b.c:b.d; ...... 15 pr. 5.

så måste män erhålla samma resultat, om man sammansätter a:b med c:d, som om man sammansätter a.crb.c med b.c:b.d, 22 prop. 5; men denna sednare sammansättning gifver a.crb.d, 18 def. 5; alltså måste äfven a.c:b.d vara det förhållande, som är sammansatt af a:b och c:d; d. v. s.

c:

= a.c:b.d,. 5

18 def. 5.

På samma sätt kan man bevisa, att det förhållande, som är sammansatt af a:b, af c:d och af e:f, måste vara a.c.e:b.d.f; eller att

11 * 152

Ty efter ....

och.......

så måste . . . .

och.......

Derföre måste, allteftersom

Femte Boken.

. . . A:B = b:c, . . . B:C~a:b; m.A:m.B = nJbin.c . m.B:n,C = m.a:n,c . m. A > = < n C m.a^> = <^.n.c

och alltså ...... A:C = a:c, h. s. b.

15 pr. 5. 4 pr. 5.

21 pr. 5. 4def.5.

XXIV Proposition* Theorem.

Om fyra, storheter äro proportionella, och en femte förhåller sig till den andra, som en Sjette till den fjerde; så .skall den första och femte tillsammanstagna förhålla sig till den andra, som den tredje och sjette tillsammanstagna förhålla sig till den fjerde.

Om .... a:b= c:d,

och .... e:b - f:d ;

så skall ...... a -H e:b - c + f:d.

Bevis. Tyemedana:b = c:d och .... , e:b = ful,

så måste .... a:b = c:d

och .... b:ezzd:f

samt således ..... a:e - c:f

Theor. eft.4pr.5. . 22 pr. 5.

och .... a + e:e - c + f:f . . . . 17 pr. 5.

Men, enligt hypoth. e:b=zf:d;

således måste . . a -f e:b = c 4 ful, h. s. b. 22 pr. 5.

Proposition. Theorem.

Om fyra storheter äro proportionella, sä är summan ftf den största och minsta större, än summan af de båda öfriga.

Om.......a:b = .c:d,

och a är störst, så måste d vara minst, enligt 14 pr. 5 och 2 Theor. efter den 16 pr. 5: det skall bevisas, att

a + d ^ b -f- c.

Bevis, så måste . . .

och......

men nu är c derföre måste

och således , samt.....

Ty då

a:b = cul

a:c = b:d......16 pr. 5.

. , a-c:c = b-d;d .... 18 pr. 5. d; emedan d är minst; . . a-c>b-d . . . 2Theor.eft.

den 16 pr 5. . . . . a > b .». c-d . a + d S> b + c, h. s. b. 4 ax.

Proposition. Problem.

Låt a, b, c, d vara fyra numertal, att sammansätta det förhållande som a har till b, med det, som c har till d.

Emedan . . . a:b = a.crb.c, och .... c:d = b.c:b.d; ...... 15 pr. 5.

så måste män erhålla samma resultat, om man sammansätter a:b med c:d, som om man sammansätter a.crb.c med b.c:b.d, 22 prop. 5; men denna sednare sammansättning gifver a.crb.d, 18 def. 5; alltså måste äfven a.c:b.d vara det förhållande, som är sammansatt af a:b och c:d; d. v. s.

c:

= a.c:b.d,. 5

18 def. 5.

På samma sätt kan man bevisa, att det förhållande, som är sammansatt af a:b, af c:d och af e:f, måste vara a.c.e:b.d.f; eller att

Ty efter ....

och.......

så måste . . . .

och.......

Derföre måste, allteftersom

. . . A:B = b:c, . . . B:C~a:b; m.A:m.B = nJbin.c . m.B:n,C = m.a:n,c . m. A > = < n C m.a^> = <^.n.c

och alltså ...... A:C = a:c, h. s. b.

15 pr. 5. 4 pr. 5.

21 pr. 5. 4def.5.

XXIV Proposition* Theorem.

Om fyra, storheter äro proportionella, och en femte förhåller sig till den andra, som en Sjette till den fjerde; så .skall den första och femte tillsammanstagna förhålla sig till den andra, som den tredje och sjette tillsammans-tagna förhålla sig till den fjerde.

Om .... a:b= c:d,

och .... e:b - f:d ;

så skall ...... a -H e:b - c + f:d.

Bevis. Tyemedana:b = c:d och .... , e:b = ful,

så måste .... a:b = c:d

och .... b:ezzd:f

samt således ..... a:e - c:f

Theor. eft.4pr.5. . 22 pr. 5.

och .... a + e:e - c + f:f . . . . 17 pr. 5.

Men, enligt hypoth. e:b=zf:d;

således måste . . a -f e:b = c 4 ful, h. s. b. 22 pr. 5.

Proposition. Theorem.

Om fyra storheter äro proportionella, sä är summan ftf den största och minsta större, än summan af de båda öfriga.

Om.......a:b = .c:d,

och a är störst, så måste d vara minst, enligt 14 pr. 5 och 2 Theor. efter den 16 pr. 5: det skall bevisas, att

a + d ^ b -f- c.

Bevis, så måste . . .

och......

men nu är c derföre måste

och således , samt.....

Ty då

a:b = cul

a:c = b:d......16 pr. 5.

. , a-c:c = b-d;d .... 18 pr. 5. d; emedan d är minst; . . a-c>b-d . . . 2Theor.eft.

den 16 pr 5. . . . . a > b .». c-d . a + d S> b + c, h. s. b. 4 ax.

Proposition. Problem.

Låt a, b, c, d vara fyra numertal, att sammansätta det förhållande som a har till b, med det, som c har till d.

Emedan . . . a:b = a.crb.c, och .... c:d = b.c:b.d; ...... 15 pr. 5.

så måste män erhålla samma resultat, om man sammansätter a:b med c:d, som om man sammansätter a.crb.c med b.c:b.d, 22 prop. 5; men denna sednare sammansättning gifver a.crb.d, 18 def. 5; alltså måste äfven a.c:b.d vara det förhållande, som är sammansatt af a:b och c:d; d. v. s.

c:

= a.c:b.d,. 5

18 def. 5.

På samma sätt kan man bevisa, att det förhållande, som är sammansatt af a:b, af c:d och af e:f, måste vara a.c.e:b.d.f; eller att

a:b c:d e:f

= a,c.e:b.d.f o. s. v.

Häraf Jinner many att forhållanden mel-lan numertal sammansättas derigenom, att man tager förhållandet mellan produkterna af de-ras hornologa termer. T. ex. 5: 7 \

9:10 [= 5.9.14:7.10.3 = 3:1. . 15 pr. 5. 14: 3)

C o roll. 1. Forhållanden mellan numertal dupliceras, derigenom., att man tager förhållandet mellan numertalens qvadrater; och tripliceras derigenom., att man tager förhållandet mellan talens kuber. Ty att duplicera a:b är, att sammansätta a:b med a:b (förkl. öfver 10:de defin.), hvilket gifver $a^2:b^2$.

Äfvenså är $a^3:b^3$ det triplicerade förhållandet af det, som a har till b; t. ex. "9:16 är dupliceradt af 3:4; 27:64 är tripliceradt af 3:4.

C oroll. 2. Om flera analogier förekomma? så äro produkterna af deras hoinologa termer proportionella.

Om.....a:b -= c:d

och........e:f = g:h

så är.....a.e:b.f = c.g:d.h......22 pr. 5.

Coroll. 3. Om fyra numertal äro pro-portionella^ så äro deras lika digniteter proportionella.

t

Om ...... $a:b \sim c:d$

så är a*:b2rrc2:d2

och .... $a^3:b^3 = c^3:d^3$ o. s. v.

hvilket man äfven sålunda uttrycker: om tvänne förhållanden äro lika, så blifva de äfven lika om de båda dupliceras, eller om de båda tripliceras ; och tvärtom: , r .-;'<*-..

Om tvänne förhållanden äro lika; så äro äfven de forhålUijIKm* af hvilka de äro duplicerade, eller tifplicerade^lika; d. v. s.

Om .... a?:b3 = c3:d3,

så är .... $a^2:b^2 = c^2:d^2$

och ..... ^. -. . $a:b = c:d$

samt

o. s. v.

Förhållandet V

3 - 3 -

af a:b, och Va:yb kallas subtripliceradt af a:b.

kallas subdupliceradt

Proposition* Theorem*

%

l:o Om f yra numertal äro proportionel-la ; så är producten af de båda yttersta lika stor med producten af de båda medlersta.

2:o Om of f yra numertal producten af de båda yttersta är lika stor med producten af de båda medlersta; sä äro dessa fyra nu-mertal proportionella.

l:o Om . . . .$a:b = c:d$; så skall .... $a.d = b.c$.

Bevis. Ty a har till b ett sådant förhållande, att .... $b.a = a.b$, . förkl, öfver def, 3; 154

Femte Boken.

a:b c:d e:f

= a,c.e:b.d.f o. s. v.

Häraf Jinner many att forhållanden mel-lan numertal sammansättas derigenom, att man tager förhållandet mellan produkterna af de-ras hornologa termer. T. ex. 5: 7 \

9:10 [= 5.9.14:7.10.3 = 3:1. . 15 pr. 5. 14: 3)

C o roll. 1. Forhållanden mellan numertal dupliceras, derigenom., att man tager förhållandet mellan numertalens qvadrater; och tripliceras derigenom., att man tager förhållandet mellan talens kuber. Ty att duplicera a:b är, att sammansätta a:b med a:b (förkl. öfver 10:de defin.), hvilket gifver $a^2:b^2$.

Äfvenså är $a^3:b^3$ det triplicerade förhållandet af det, som a har till b; t. ex. "9:16 är dupliceradt af 3:4; 27:64 är tripliceradt af 3:4.

C oroll. 2. Om flera analogier förekomma? så äro produkterna af deras hoinologa termer proportionella.

Om.....a:b -= c:d

och........e:f = g:h

så är.....a.e:b.f = c.g:d.h......22 pr. 5.

Coroll. 3. Om fyra numertal äro pro-portionella^ så äro deras lika digniteter proportionella.

t

Om ...... a:b ~ c:d

så är a*:b2rrc2:d2

och .... a3:b3 = c3:d3 o. s. v.

hvilket man äfven sålunda uttrycker: om tvänne förhållanden äro lika, så blifva de äfven lika om de båda dupliceras, eller om de båda tripliceras ; och tvärtom: , r .-;'<*-..

Om tvänne förhållanden äro lika; så äro äfven de forhålUijIKm* af hvilka de äro duplicerade, eller tifplicerade^lika; d. v. s.

Om .... a?:b3 = c3:d3,

så är .... a2:b2 = c2:d2

och ..... ^. -. . a:b = c:d

samt

o. s. v.

Förhållandet V

3 - 3 -

af a:b, och Va:yb kallas subtripliceradt af a:b.

kallas subdupliceradt

Proposition* Theorem*

%

l:o Om f yra numertal äro proportionel-la ; så är producten af de båda yttersta lika stor med producten af de båda medlersta.

2:o Om of f yra numertal producten af de båda yttersta är lika stor med producten af de båda medlersta; sä äro dessa fyra nu-mertal proportionella.

l:o Om . . . .a:b = c:d; så skall .... a.d = b.c.

Bevis. Ty a har till b ett sådant förhållande, att .... b.a = a.b, . förkl, öfver def, 3;156

derföre måste äfven c hafva till d ett sådant förhållande, att.... b.c = a.d, hvadan . ,.....a.d = b.c, h. s. b.

2:o Om . ... a.d = b.c så skall......a:b = c:d.

Bevis. Ty då a.d ~ b.c, eller b.c = a.d; så är derigenom bestämdt, hvad förhållande c har till d. nämligen ett sådant, att c, taget 6 gånger, är lika med d, taget a gånger; och nu är äfven b.a = a.\).

Då således . . b.a = a.b

och . . . .b.c = a.d,

så måste......a:b = c:d, förkl. öfver def. 3.

XHLWIII P Apposition. Theorem*

l:o Om tre numertal äro proportionella; sa är produkten af de båda yttersta lika stor -med qvadraten af det medlersta.

2:0 Om af tre numertal producten af de båda yttersta är lika stor med qvadraten af det medlersta; så äro dessa tre numertal proportionella.

e

sa

l:o Om.

ar

. . a:b = b:c; . . a.c = b2.

2:o Om. : . . a.c = b2;

så är ,.......a:b = b:c;

hvilket bevises såsom prop. 27.

Då således a.c = b2, eller b = 1/ac; så är V ac medlersta proportionalen till a och c.

i

På samma sätt är 1/m.n medlersta proportionalen till in och n, \/36 = 6 = medlersta proportionalen till 4 och 9, 10 == medlersta proportionalen till 4 och 25; emedan 1/4.25=10. (16-1T prop. 6)

SJETTE BOKEN.

HefiiiHioner«

1. Rätliniga figurer äro likformiga, om alla vinklarne uti den ena figuren äro lika stora med hvar sin vinkel uti den andra figuren, och om sidorna omkring de lika stora vinklarna äro proportionella.

Om vinkeln A =±=fy B =b C^^c, D = d, och E =e; samt om AB:BC = ab:bc, BO.CD ^ bc:cd, CD: DE = cd:de och DK:EA = de:ea; så äro figurerna ABCDE och abcde likformiga.

2. Uti figurer sägas lineer vara proportionella tvär (emot hvarandra, när de båda fore-

derföre måste äfven c hafva till d ett sådant förhållande, att.... b.c = a.d, hvadan . ,.....a.d = b.c, h. s. b.

2:o Om . ... a.d = b.c så skall......a:b = c:d.

Bevis. Ty då a.d ~ b.c, eller b.c = a.d; så är derigenom bestämdt, hvad förhållande c har till d. nämligen ett sådant, att c, taget 6 gånger, är lika med d, taget a gånger; och nu är äfven b.a = a.\).

Då således . . b.a = a.b

och . . . .b.c = a.d,

så måste......a:b = c:d, förkl. öfver def. 3.

XHLWIII P Apposition. Theorem*

l:o Om tre numertal äro proportionella; sa är produkten af de båda yttersta lika stor -med qvadraten af det medlersta.

2:0 Om af tre numertal producten af de båda yttersta är lika stor med qvadraten af det medlersta; så äro dessa tre numertal proportionella.

e

sa

l:o Om.

ar

. . a:b = b:c; . . a.c = b^2.

2:o Om. : . . a.c = b^2;

så är ,.......a:b = b:c;

hvilket bevises såsom prop. 27.

Då således a.c = b^2, eller b = 1/ac; så är V ac medlersta proportionalen till a och c.

i

På samma sätt är 1/m.n medlersta proportionalen till in och n, \/36 = 6 = medlersta proportionalen till 4 och 9, 10 == medlersta proportionalen till 4 och 25; emedan 1/4.25=10. (16-1T prop. 6)

SJETTE BOKEN.

HefiiiHioner«

1. Rätliniga figurer äro likformiga, om alla vinklarne uti den ena figuren äro lika stora med hvar sin vinkel uti den andra figuren, och om sidorna omkring de lika stora vinklarna äro proportionella.

Om vinkeln A =±=fy B =b C^^c, D = d, och E =e; samt om AB:BC = ab:bc, BO.CD ^ bc:cd, CD: DE = cd:de och DK:EA = de:ea; så äro figurerna ABCDE och abcde likformiga.

2. Uti figurer sägas lineer vara proportionella tvär (emot hvarandra, när de båda fore-

derföre måste äfven c hafva till d ett sådant förhållande, att.... b.c = a.d, hvadan . ,.....a.d = b.c, h. s. b.

2:o Om . ... a.d = b.c så skall......a:b = c:d.

Bevis. Ty då a.d ~ b.c, eller b.c = a.d; så är derigenom bestämdt, hvad förhållande c har till d. nämligen ett sådant, att c, taget 6 gånger, är lika med d, taget a gånger; och nu är äfven b.a = a.\).

Då således . . b.a = a.b

och . . . .b.c = a.d,

så måste......a:b = c:d, förkl. öfver def. 3.

XHLWIII P Apposition. Theorem*

l:o Om tre numertal äro proportionella; sa är produkten af de båda yttersta lika stor -med qvadraten af det

medlersta.

2:0 Om af tre numertal producten af de båda yttersta är lika stor med qvadraten af det medlersta; så äro dessa tre numertal proportionella.

e

sa

l:o Om.

ar

. . a:b = b:c; . . a.c = b2.

2:o Om. : . . a.c = b2;

så är ,.......a:b = b:c;

hvilket bevises såsom prop. 27.

Då således a.c = b2, eller b = 1/ac; så är V ac medlersta proportionalen till a och c.

i

På samma sätt är 1/m.n medlersta proportionalen till in och n, \/36 = 6 = medlersta proportionalen till 4 och 9, 10 == medlersta proportionalen till 4 och 25; emedan 1/4.25=10. (16-1T prop. 6)

SJETTE BOKEN.

HefiiiHioner«

1. Rätliniga figurer äro likformiga, om alla vinklarne uti den ena figuren äro lika stora med hvar sin vinkel uti den andra figuren, och om sidorna omkring de lika stora vinklarna äro proportionella.

Om vinkeln A =±=fy B =b C^^c, D = d, och E =e; samt om AB:BC = ab:bc, BO.CD ^ bc:cd, CD: DE = cd:de och DK:EA = de:ea; så äro figurerna ABCDE och abcde likformiga.

2. Uti figurer sägas lineer vara proportionella tvär (emot hvarandra, när de båda fore-

gående termerne uti analogien äro uti den ena figuren, och de båda efterföljande termerne äro uti den andra.

Om CD:DE = DF:BD; så äro sidorna omkring vinklarna BDC och EDF proportionella tvärtemot hvarandra.

A» ~

G

4. Höjden af en figur kallas den räta lineen, som drages från öfversta spetsen, vinkelrätt mot basen,

5. Om man tager producterna af de homo-loga termerna uti 2:ne eller flera gifna förhållanden, så säges förhållandet mellan dessa pro-ducter vara sammansatt af de gifna.

l JPropositioit. Theorem.

Trianglar och parallelogrammer, som hafva samma höjd*), förhålla sig till hvarandra såsom deras baser.

Låt ABC och ACD vara tvänne trianglar, som hafva samma höjd, nämligen den räta lineen, som från A kan dragas vinkelrätt mot BD; det skall bevisas, att

tri.ABCrtri. ACD = BC:CD.

*) Att trianglar och parallelogrammer hafva gamma höjd är hvad man i första Boken uttrycker, då man säger, att

de äro mellan samma parallela lineer.

E A F

1.-XIV D K L

Bevis. Drag ut BD åt båda sidor, gör DK, KL etc. hvardera lika stor med CD, och BG, GH, Hl etc. hvardera lika stor m ed BC; drag AK, AL..; ÄG, AH, AI...

l:o Då måste alla trianglarne ABC = AGB = AHG ~ AHI, emedan de stå på lika stora baspr, och imellan samma parallela lineer, a. Således är triang. AIC lika mångfaldig af tri- a. 38 prop. 1. ängeln ABC, som basen IC är af b- 5 defin- 5-basen BC; ehuru mångfaldiga de J J* PTP' J-än rnå vara. «/ n '

På samma sätt bevises, att triang. ALC är lika mångfaldig af triang. ACD, som basen CL är af basen CD ; ehuru mångfaldiga dessa må vara.

Men nu måste triang. AIC > = < triang. ALC allteftersom basen ..... IC>=2<basen CL, a; och derföre är . . . ABC:ACD =BC:CD,b;h.s.b.

2:o Det skall äfven bevisas, att parallelogr. EC: parallelogr. FC = BC:CD. Ty EC = 2. triang. ABC, och FC = 2. triang.ACD, c ; derföre måste

EC:FC = ABC:ACD . . d; men det är bevist, att ABC:ACD crBC:CD; derföre måste äfven EC:FCz,-_BC:CD, e; h. s. b.

II Proposition.

Om en rät linea drages parallel med en sida uti en triangel , så skär hon de öfriga

gående termerne uti analogien äro uti den ena figuren, och de båda efterföljande termerne äro uti den andra.

Om CD:DE = DF:BD; så äro sidorna omkring vinklarna BDC och EDF proportionella tvärtemot hvarandra.

A» ~

G

4. Höjden af en figur kallas den räta lineen, som drages från öfversta spetsen, vinkelrätt mot basen,

5. Om man tager producterna af de homo-loga termerna uti 2:ne eller flera gifna förhållanden, så säges förhållandet mellan dessa pro-ducter vara sammansatt af de gifna.

l JPropositioit. Theorem.

Trianglar och parallelogrammer, som hafva samma höjd*), förhålla sig till hvarandra såsom deras baser.

Låt ABC och ACD vara tvänne trianglar, som hafva samma höjd, nämligen den räta lineen, som från A kan dragas vinkelrätt mot BD; det skall bevisas, att

tri.ABCrtri. ACD = BC:CD.

*) Att trianglar och parallelogrammer hafva gamma höjd är hvad man i första Boken uttrycker, då man säger, att de äro mellan samma parallela lineer.

Sjette Boken.

159

E A F

1.-XIV D K L

Bevis. Drag ut BD åt båda sidor, gör DK, KL etc. hvardera lika stor med CD, och BG, GH, Hl etc. hvardera lika stor m ed BC; drag AK, AL..; ÄG, AH, AI...

l:o Då måste alla trianglarne ABC = AGB = AHG ~ AHI, emedan de stå på lika stora baspr, och imellan samma parallela lineer, a. Således är triang. AIC lika mångfaldig af tri- a. 38 prop. 1. ängeln ABC, som basen IC är af b- 5 defin- 5-basen BC; ehuru mångfaldiga de J J* PTP' J-än rnå vara. «/ n '

På samma sätt bevises, att triang. ALC är lika mångfaldig af triang. ACD, som basen CL är af basen CD ; ehuru mångfaldiga dessa må vara.

Men nu måste triang. AIC > = < triang. ALC allteftersom basen ..... IC>=2<basen CL, a; och derföre är . . . ABC:ACD =BC:CD,b;h.s.b.

2:o Det skall äfven bevisas, att parallelogr. EC: parallelogr. FC = BC:CD. Ty EC = 2. triang. ABC, och FC = 2. triang.ACD, c ; derföre måste

EC:FC = ABC:ACD . . d; men det är bevist, att ABC:ACD crBC:CD; derföre måste äfven EC:FCz,-_BC:CD, e; h. s. b.

II Proposition.

Om en rät linea drages parallel med en sida uti en triangel , så skär hon de öfriga 158

gående termerne uti analogien äro uti den ena figuren, och de båda efterföljande termerne äro uti den andra.

Om CD:DE = DF:BD; så äro sidorna omkring vinklarna BDC och EDF proportionella tvärtemot hvarandra.

A» ~

G

4. Höjden af en figur kallas den räta lineen, som drages från öfversta spetsen, vinkelrätt mot basen,

5. Om man tager producterna af de homo-loga termerna uti 2:ne eller flera gifna förhållanden, så säges förhållandet mellan dessa pro-ducter vara sammansatt af de gifna.

l JPropositioit. Theorem.

Trianglar och parallelogrammer, som hafva samma höjd*), förhålla sig till hvarandra såsom deras baser.

Låt ABC och ACD vara tvänne trianglar, som hafva samma höjd, nämligen den räta lineen, som från A kan dragas vinkelrätt mot BD; det skall bevisas, att

tri.ABCrtri. ACD = BC:CD.

*) Att trianglar och parallelogrammer hafva gamma höjd är hvad man i första Boken uttrycker, då man säger, att de äro mellan samma parallela lineer.

E A F

1.-XIV D K L

Bevis. Drag ut BD åt båda sidor, gör DK, KL etc. hvardera lika stor med CD, och BG, GH, Hl etc. hvardera lika stor m ed BC; drag AK, AL..; ÄG, AH, AI...

l:o Då måste alla trianglarne ABC = AGB = AHG ~ AHI, emedan de stå på lika stora baspr, och imellan samma parallela lineer, a. Således är triang. AIC lika mångfaldig af tri- a. 38 prop. 1. ängeln ABC, som basen IC är af b-

5 defin- 5-basen BC; ehuru mångfaldiga de J J* PTP' J-än rnå vara. «/ n '

På samma sätt bevises, att triang. ALC är lika mångfaldig af triang. ACD, som basen CL är af basen CD ; ehuru mångfaldiga dessa må vara.

Men nu måste triang. AIC > = < triang. ALC allteftersom basen ..... IC>=2<basen CL, a; och derföre är . . . ABC:ACD =BC:CD,b;h.s.b.

2:o Det skall äfven bevisas, att parallelogr. EC: parallelogr. FC = BC:CD. Ty EC = 2. triang. ABC, och FC = 2. triang.ACD, c ; derföre måste

EC:FC = ABC:ACD . . d; men det är bevist, att ABC:ACD crBC:CD; derföre måste äfven EC:FCz,-_BC:CD, e; h. s. b.

II Proposition.

Om en rät linea drages parallel med en sida uti en triangel , så skär hon de öfriga160

båda sidorna i samma forhållande; och om en rät linea skär tvänne sidor uti en triangel i samma förhållande, så är hon parallel med den tredje sidan.

B

Således men , . derföre äfven och då så måste

l:o Om DE är parallel BC; så skall det bevisas, att AD.:DB = AE:EC.

med

Bevis/ Drag BE och DC.

Emedan då DE är parallel med BC; så måste triang. BDE = triang. CDE 37 pr. 1. måste ADE:BDE = ADE:CDE . 7 pr. 5. , . . . ADE:BDE = AD:DB. . . l pr. 6.

m

åste

slutl.

ADE:CDE = AD:DB. . . 11 pr. 5. ADE:CDE:= AE:EC. . . l pr. 6. = AE:EC,h.s.b.llpr.5.

2:o Om .. så skall det bevisas, att DE är parallel med BC.

Bevis. Ty efter

AD:DB

och........AD:DB

så måste äfven . AE:EC men nu är. ... AE:EC derföre måste ADE:BDE och således triang. BDE hvaraf följer, att DE är

=AE:EC,

= tri.ADE:tri.BDE,l p.6. =ADE:BDE. . 11 pr. 5. = tri.ADE:tri.CDE l p. 6. = ADE:CDE, . llpr.5. =triang. CDE, 9pr.5. parallel med BC, h. s. b. 39 pr. l.

III Proposition. Theorem.

Om en rät linea, som skär en vinkel uti en triangel midtitu, äfven skär basen; så sko-la basens delar hafva samma

förhållande till hvarandra, som triangelns ^sidor. Och örn basens delar förhålla sig såsom triangelns sidor ; så skall den räta lineen, som drages f rån afskärningspunkten till motstående vinkelns spets 9 skära denna vinkel midtitu.

l:o Dm uti triangeln ABC, vinkeln BAD^DAC; så skall det bevisas, att

BD:DC:=AB:AC.

Re v i s. Drag CE parallel med AD, och låt BÄ och CE råkas uti E.

Emedan CE är parallel med AD,- så måste

B g - r d

vinkeln BAD ^ EEC .... 29 pr. 1.

och vinkeln DAC = ACE;. . . . 29 pr. 1.

men det är antaget, att .... BAD =DAC;

derföre måste .... BEC = ACE,

och således ..... AE = AC ..... 6 pr. 1.

Alltså måste . . AB:AE = AB;AC; . . T pr. 5. och då ...... BD:DC = AB:AE, . . 2 pr. 6.

så måste äfven . BD:DC = AB:AC, h. s. b.

11 pr. 5.

2:o Om BD:DC = AB:AC; så skall det bevisas, att vinkeln BAD = DAC.

båda sidorna i samma forhållande; och om en rät linea skär tvänne sidor uti en triangel i samma förhållande, så är hon parallel med den tredje sidan.

B

Således men , . derföre äfven och då så måste

l:o Om DE är parallel BC; så skall det bevisas, att AD.:DB = AE:EC.

med

Bevis/ Drag BE och DC.

Emedan då DE är parallel med BC; så måste triang. BDE = triang. CDE 37 pr. 1. måste ADE:BDE = ADE:CDE . 7 pr. 5. , . . . ADE:BDE = AD:DB. . . l pr. 6.

m

åste

slutl.

ADE:CDE = AD:DB. . . 11 pr. 5. ADE:CDE:= AE:EC. . . l pr. 6. = AE:EC,h.s.b.llpr.5.

2:o Om .. så skall det bevisas, att DE är parallel med BC.

Bevis. Ty efter

AD:DB

och........AD:DB

så måste äfven . AE:EC men nu är. ... AE:EC derföre måste ADE:BDE och således triang. BDE hvaraf följer, att

DE är

=AE:EC,

= tri.ADE:tri.BDE,l p.6. =ADE:BDE. . 11 pr. 5. = tri.ADE:tri.CDE l p. 6. = ADE:CDE, . llpr.5. =triang. CDE, 9pr.5. parallel med BC, h. s. b. 39 pr. l.

III Proposition. Theorem.

Om en rät linea, som skär en vinkel uti en triangel midtitu, äfven skär basen; så sko-la basens delar hafva samma förhållande till hvarandra, som triangelns ^sidor. Och örn basens delar förhålla sig såsom triangelns sidor ; så skall den räta lineen, som drages f rån afskärningspunkten till motstående vinkelns spets 9 skära denna vinkel midtitu.

l:o Dm uti triangeln ABC, vinkeln BAD^DAC; så skall det bevisas, att

BD:DC:=AB:AC.

Re v i s. Drag CE parallel med AD, och låt BÄ och CE råkas uti E.

Emedan CE är parallel med AD,- så måste

B g - r d

vinkeln BAD ^ EEC .... 29 pr. 1.

och vinkeln DAC = ACE;. . . . 29 pr. 1.

men det är antaget, att .... BAD =DAC;

derföre måste .... BEC = ACE,

och således ..... AE = AC ..... 6 pr. 1.

Alltså måste . . AB:AE = AB;AC; . . T pr. 5. och då ...... BD:DC = AB:AE, . . 2 pr. 6.

så måste äfven . BD:DC = AB:AC, h. s. b.

11 pr. 5.

2:o Om BD:DC = AB:AC; så skall det bevisas, att vinkeln BAD = DAC.

lette Boken.

Bevis. Emedan BD:DC"= AB:AC,

och..........BD.DC = ABrAE,,

så måste ......AB:AC = ABrAE,

och således.......AC = AE

Alltså är . . vinkeln AEC = ACE; . .

men.....vinkeln AEG = BÅD, . .

och......vinkeln ACEzzDAC; .

2 pr. 6. 11 pr. 5.

9 pr. 5.

5 pr. 1. 29pr.l. 29 pr. 1.

derföre måste vinkeln BÅD = DAC, h. s. b.

IV Proposition. Theorem.

Uti likvinkliga trianglar äro sidorna omkring de lika stora vinklarna proportionella, så att de sidor äro hornologa, som stå emot lika stora v inkläry

Om vinkeln ABC = ECD, och ACB = EDC, samt BAC^=CED; så skall det bevisas, att AB:BC = EC:CD,

och att.......BC:AC = CD:ED,

samt att ,;.... AB:AC = EC:ED.

Bevis. "Ställ triangeln ECD så, att sidorna BC och CD komma uti en rät linea

Emedan då vinklarne ACB och EDC antagas vara lika B1' 'c' '*$"* stora; så måste vinklarne

ABC -f ACB = ABC 4 EDC,

men nu äro I ABC + ACB < 2:ne räta . 17 pr. 1. derföre måste ABC + EBC < 2:ne räta; hvadan AB och ED måste råkas uti någon punkt E, om de utdragas. 12 axiom.

t

t

163

Efter då vinMfe^CB = EDC; så måste AC

vara parallel med FD; , .*.........28 pr. 1.

och efter vinkeln FBt^ECD: så måste EC vara parallel med BF...... .W. . . . . 28pr. 1.

Derföre är FC en parallelogram.

Men nu är AB:AF =JBC:CD .... 2 pr. 6.

d. v. s......AB:EC = BC:CD .... 7 pr. 5.

ochom man vex- **

lar om.....AB:BC=:EC:CD,h.s. b. 16 pr. 5.

Vidare ar . . Bf^D^FEjEB .... 2 pr. 6.

d. v. s......B?:CD^AC:ED .... 7 pr. 5.

och om man vex- **

lar om, ... Öt:AC^CD;ED,h.s.b. 16pr.5.

Slutligen, e- ^

medan.....^B:BC=EC:CD

och ....B^:AC^CD:ED;

så måste .... ÄB:AC = EC:ED,h.s.b. 22 pr. 5.

W Proposition. TJieorem.

Om tvänne trianglar hafva sidorna pro-^ä är^o de likvinkliga sinsimellan, de vinklar lika stora, som stå emot ho niolog a sidor.

l Om . . . . AB:BCåLab:bc,

och . ... BC:AC = bc:ac,

lamt J ...... AB:AC--ab:ac; så skall det be-

visas, att vinkeln A=a, att vinkeln B=abc, och att vinkeln C =

Bevis. Gör vinkeln dbc - B, och vinkeln = c; så måste dr^=A .... 32 pr. l . 162

Sjette Boken.

lette Boken.

Bevis. Emedan BD:DC"= AB:AC,

och..........BD.DC = ABrAE,,

så måste ......AB:AC = ABrAE,

och således.......AC = AE

Alltså är . . vinkeln AEC = ACE; . .

men.....vinkeln AEG = BÅD, . .

och......vinkeln ACEzzDAC; .

2 pr. 6. 11 pr. 5.

9 pr. 5.

5 pr. 1. 29pr.l. 29 pr. 1.

derföre måste vinkeln BÅD = DAC, h. s. b.

IV Proposition. Theorem.

Uti likvinkliga trianglar äro sidorna omkring de lika stora vinklarna proportionella, så att de sidor äro hornologa, som stå emot lika stora v inkläry

Om vinkeln ABC = ECD, och ACB = EDC, samt BAC^=CED; så skall det bevisas, att AB:BC = EC:CD,

och att.......BC:AC = CD:ED,

samt att ,;.... AB:AC = EC:ED.

Bevis. "Ställ triangeln ECD så, att sidorna BC och CD komma uti en rät linea

Emedan då vinklarne ACB och EDC antagas vara lika B1' 'c' '*$"* stora; så måste vinklarne

ABC -f ACB = ABC 4 EDC,

men nu äro I ABC + ACB < 2:ne räta . 17 pr. 1. derföre måste ABC + EBC < 2:ne räta; hvadan AB och ED måste råkas uti någon punkt E, om de utdragas. 12 axiom.

t

t

163

Efter då vinMfe^CB = EDC; så måste AC

vara parallel med FD; , .*.........28 pr. 1.

och efter vinkeln FBt^ECD: så måste EC vara parallel med BF...... .W. . . . . 28pr. 1.

Derföre är FC en parallelogram.

Men nu är AB:AF =JBC:CD .... 2 pr. 6.

d. v. s......AB:EC = BC:CD .... 7 pr. 5.

ochom man vex- **

lar om.....AB:BC=:EC:CD,h.s. b. 16 pr. 5.

Vidare ar . . Bf^D^FEjEB .... 2 pr. 6.

d. v. s......B?:CD^AC:ED .... 7 pr. 5.

och om man vex- **

lar om, ... Öt:AC^CD;ED,h.s.b. 16pr.5.

Slutligen, e- ^

medan.....^B:BC=EC:CD

och ....B^:AC^CD:ED;

så måste .... ÄB:AC = EC:ED,h.s.b. 22 pr. 5.

W Proposition. TJieorem.

Om tvänne trianglar hafva sidorna pro-^ä är^o de likvinkliga sinsimellan, de vinklar lika stora, som stå emot ho niolog a sidor.

l Om . . . . AB:BCåLab:bc,

och . ... BC:AC = bc:ac,

lamt J ...... AB:AC--ab:ac; så skall det be-

visas, att vinkeln A=a, att vinkeln B=abc, och att vinkeln C =

Bevis. Gör vinkeln dbc - B, och vinkeln = c; så måste dr^=A .... 32 pr. l . 162

Sjette Boken.

lette Boken.

Bevis. Emedan BD:DC"= AB:AC,

och..........BD.DC = ABrAE,,

så måste ......AB:AC = ABrAE,

och således.......AC = AE

Alltså är . . vinkeln AEC = ACE; . .

men.....vinkeln AEG = BÅD, . .

och......vinkeln ACEzzDAC; .

2 pr. 6. 11 pr. 5.

9 pr. 5.

5 pr. 1. 29pr.l. 29 pr. 1.

derföre måste vinkeln BÅD = DAC, h. s. b.

IV Proposition. Theorem.

Uti likvinkliga trianglar äro sidorna omkring de lika stora vinklarna proportionella, så att de sidor äro hornologa, som stå emot lika stora v inkläry

Om vinkeln ABC = ECD, och ACB = EDC, samt BAC^=CED; så skall det bevisas, att AB:BC = EC:CD,

och att.......BC:AC = CD:ED,

samt att ,;.... AB:AC = EC:ED.

Bevis. "Ställ triangeln ECD så, att sidorna BC och CD komma uti en rät linea

Emedan då vinklarne ACB och EDC antagas vara lika B1' 'c' '*$"* stora; så måste vinklarne

ABC -f ACB = ABC 4 EDC,

men nu äro I ABC + ACB < 2:ne räta . 17 pr. 1. derföre måste ABC + EBC < 2:ne räta; hvadan AB och ED måste råkas uti någon punkt E, om de utdragas. 12 axiom.

t

t

163

Efter då vinMfe^CB = EDC; så måste AC

vara parallel med FD; , .*.........28 pr. 1.

och efter vinkeln FBt^ECD: så måste EC vara parallel med BF...... .W. . . . . 28pr. 1.

Derföre är FC en parallelogram.

Men nu är AB:AF =JBC:CD .... 2 pr. 6.

d. v. s......AB:EC = BC:CD .... 7 pr. 5.

ochom man vex- **

lar om.....AB:BC=:EC:CD,h.s. b. 16 pr. 5.

Vidare ar . . Bf^D^FEjEB .... 2 pr. 6.

d. v. s......B?:CD^AC:ED .... 7 pr. 5.

och om man vex- **

lar om, ... Öt:AC^CD;ED,h.s.b. 16pr.5.

Slutligen, e- ^

medan.....^B:BC=EC:CD

och ....B^:AC^CD:ED;

så måste .... ÄB:AC = EC:ED,h.s.b. 22 pr. 5.

W Proposition. TJieorem.

Om tvänne trianglar hafva sidorna pro-^ä är^o de likvinkliga sinsimellan, de vinklar lika stora, som stå emot ho niolog a sidor.

l Om . . . . AB:BCåLab:bc,

och . ... BC:AC = bc:ac,

lamt J ...... AB:AC--ab:ac; så skall det be-

visas, att vinkeln A=a, att vinkeln B=abc, och att vinkeln C =

Bevis. Gör vinkeln dbc - B, och vinkeln = c; så måste dr^=A .... 32 pr. l .164

Sjette

' således trianglar-ne ABC^och dbc äro likvinkli-

db:bc 4pr.6. . . AB;BC - ab:bc hypoth. d er f Öre

måste . db;bc ~ ab:bc 11 pr. 5. och såle-

des .... db^=:ab . . 9 pr. 5. ~*

På samma sätt bevises, au dc = ac; och då basen be är gemensam för bäua trianglarna abc, dbc; så måste vinkeln *

d = a, dbc=abc, dcbg^acb; . . 8 pr. 1.

Men nu är d = A, dbc - B,jrlcb~C; alltså måste A =?a. B = abc och%)r acb, h. s. b. l ax.

r" O /

,y

Proposition. TlieoreiiK

Örn tvänne trianglar^afvarvar sffylika stor vinkel, och sidorna omkring de lika%)sto-ra vinklarna proportionella; så äro trigng-

~ ffhf

larne likvinklige, och nafva de vinklarnMika stora, som stå emot homfalvga sidor. fe

' &r* W- ,~

^T t?j , '

Om uti trianglarna ABC^abc, vinkeln A== bac, och ^

AB:AC = ab:ac; så skaU^t bevisas, att1 vinkeln B = abc, och al? vinkeln C - acb.

l

Bevis. Gör vinkeln dac r: A och dca~C; så måste vinkeln d = B........32 pr. 1.

Uti de båda likvinkliga trianglarna ABC, adc måste således AB:AC = ad:ac; 4 pr. 6. men. . AB:AC = ab:ac; hypoth.

derföre måste.......> ad:ac.^ab:ac 11 pr 5.

och således........... ad = ab . . 9 pr. 5.

Dessutom är ac gemensam för de båda trianglarna adc, abc, samt vinkeln dac = A-bac; derföre måste vinkeln

d r abc, och dca = acb ... 4 pr. 1. Men nu är, d=B, och dca = C; derföre måste vinkeln . . B = abc, och, C = acb, h. s. b.

VII Proposition, Theorem.

Örn tvänne trianglar hafva hvar sin lika stor vinkel9- och sidorna omkring tvänne an-dra vinklar proportionella, samt am den tredje vinkeln antingen är uti båda trianglarna spetsig, eller uti häda icke spetsig: så skola trianglarna vara likvinkliga, och hafva de vinklar lika stora > omkring hvilka de proportionella sidorna äro.

l:o Om vinkeln A = D, och om AB:BC = DE:EF; samt om vinklarne C och F äro båda spetsiga; så skall det bevisas, att vinkeln ABC*lJEF och ACB^DFE. 164

' således trianglar-ne ABC^och dbc äro likvinkli-

db:bc 4pr.6. . . AB;BC - ab:bc hypoth. d er f Öre

måste . db;bc ~ ab:bc 11 pr. 5. och såle-

des .... db^=:ab . . 9 pr. 5. ~*

På samma sätt bevises, au dc = ac; och då basen be är gemensam för bäua trianglarna abc, dbc; så måste vinkeln *

d = a, dbc=abc, dcbg^acb; . . 8 pr. 1.

Men nu är d = A, dbc - B,jrlcb~C; alltså måste A =?a. B = abc och%)r acb, h. s. b. l ax.

r" O /

,y

Proposition. TlieoreiiK

Örn tvänne trianglar^afvarvar sffylika stor vinkel, och sidorna omkring de lika%)sto-ra vinklarna proportionella; så äro trigng-

~ ffhf

larne likvinklige, och nafva de vinklarnMika stora, som stå emot homfalvga sidor. fe

' &r* W- ,~

^T t?j , '

Om uti trianglarna ABC^abc, vinkeln A== bac, och ^

AB:AC = ab:ac; så skaU^t bevisas, att1 vinkeln B = abc, och al? vinkeln C - acb.

l

Bevis. Gör vinkeln dac r: A och dca~C; så måste vinkeln d = B........32 pr. 1.

Uti de båda likvinkliga trianglarna ABC, adc måste således AB:AC = ad:ac; 4 pr. 6. men. . AB:AC = ab:ac; hypoth.

derföre måste.......> ad:ac.^ab:ac 11 pr 5.

och således........... ad = ab . . 9 pr. 5.

Dessutom är ac gemensam för de båda trianglarna adc, abc, samt vinkeln dac = A-bac; derföre måste vinkeln

d r abc, och dca = acb ... 4 pr. 1. Men nu är, d=B, och dca = C; derföre måste vinkeln . . B = abc, och, C = acb, h. s. b.

VII Proposition, Theorem.

Örn tvänne trianglar hafva hvar sin lika stor vinkel9- och sidorna omkring tvänne an-dra vinklar proportionella, samt am den tredje vinkeln antingen är uti båda trianglarna spetsig, eller uti häda icke spetsig: så skola trianglarna vara likvinkliga, och hafva de vinklar lika stora > omkring hvilka de proportionella sidorna äro.

l:o Om vinkeln A = D, och om AB:BC = DE:EF; samt om vinklarne C och F äro båda spetsiga; så skall det bevisas, att vinkeln ABC*lJEF och ACB^DFE. 164

' således trianglar-ne ABC^och dbc äro likvinkli-

db:bc 4pr.6. . . AB;BC - ab:bc hypoth. d er f Öre

måste . db;bc ~ ab:bc 11 pr. 5. och såle-

des .... db^=:ab . . 9 pr. 5. ~*

På samma sätt bevises, au dc = ac; och då basen be är gemensam för bäua trianglarna abc, dbc; så måste vinkeln *

d = a, dbc=abc, dcbg^acb; . . 8 pr. 1.

Men nu är d = A, dbc - B,jrlcb~C; alltså måste A =?a. B = abc och%)r acb, h. s. b. l ax.

r" O /

,y

Proposition. TlieoreiiK

Örn tvänne trianglar^afvarvar sffylika stor vinkel, och sidorna omkring de lika%)sto-ra vinklarna proportionella; så äro trigng-

~ ffhf

larne likvinklige, och nafva de vinklarnMika stora, som stå emot homfalvga sidor. fe

' &r* W- ,~

^T t?j , '

Om uti trianglarna ABC^abc, vinkeln A== bac, och ^

AB:AC = ab:ac; så skaU^t bevisas, att1 vinkeln B = abc, och al? vinkeln C - acb.

l

Bevis. Gör vinkeln dac r: A och dca~C; så måste vinkeln d = B........32 pr. 1.

Uti de båda likvinkliga trianglarna ABC, adc måste således AB:AC = ad:ac; 4 pr. 6. men. . AB:AC = ab:ac; hypoth.

derföre måste.......> ad:ac.^ab:ac 11 pr 5.

och således........... ad = ab . . 9 pr. 5.

Dessutom är ac gemensam för de båda trianglarna adc, abc, samt vinkeln dac = A-bac; derföre måste vinkeln

d r abc, och dca = acb ... 4 pr. 1. Men nu är, d=B, och dca = C; derföre måste vinkeln . . B = abc, och, C = acb, h. s. b.

VII Proposition, Theorem.

Örn tvänne trianglar hafva hvar sin lika stor vinkel9- och sidorna omkring tvänne an-dra vinklar proportionella, samt am den tredje vinkeln antingen är uti båda trianglarna spetsig, eller uti häda icke spetsig: så skola trianglarna vara likvinkliga, och hafva de vinklar lika stora > omkring hvilka de proportionella sidorna äro.

l:o Om vinkeln A = D, och om AB:BC = DE:EF; samt om vinklarne C och F äro båda spetsiga; så skall det bevisas, att vinkeln ABC*lJEF och ACB^DFE.

A

D

Bevis. Om icke vinkeln ABC = DEF; så låt ABG

C E F

Emedan då A .= D, och ABG = DEF; så måste AGB^DFE......32 pr. 1.

Men DFE ar spetsig, således är AGB spetsig.

Efter nu trfenglarne ABG och DEF äro likvinklige; så -måste

AB:BG^DE;EF,..... 4 pr. 6.

men......AB:BC = DE:E$; .... hypoth.

derföre måste AB:BG - AB BC, ... 11 pr. 5.

och således . , . . BG ~ BC,....... 9 pr. 5.

samt vinkeln. . . BGC = BCG...... 5 pr. 1.

Nu är vinkeln . BCG spetsig...... hypoth.

derföre skulle vinkeln BGC äfven vara spetsig; och således båda vinklarne AGB och BGC vara

spetsiga, hvilket är omöjligt.......13 pr. 1.

"Alltså kan ej vinkeln ABC vara större, är* DEF; och på samma sätt bevises, att icke AEfc är mindre, än DEF; derföre är ABC = DEF, och således äfven den tredje vinkeln ACB = DFE, h. s b. 32pr.l..

2:o Om vinklarne C och F vore båda trub-bige, och man antoge, att vinkeln ABG = DE F; så bevises på samma sätt, att båda vinklarne BCG och BGC skulle vara trubbige r hvilket äfven är omöjligt............-. *......17 pr. 1.

Således kan icke heller L denna händelse vinkeln ABC vara större, eller anindre än DEF; hvadan trianglarne måste vara likvinklige; h. s. b^.

3:o Om vinklarne C och F vore båda räta, så vore de lika stora; och då är det klart, att den tredje vinkeln ABC = DEF.

WIII Proposition. Theorem.

Om uti en rätvinklig triangel en ritt linea drages 9 från den räta vinkelns spets, vinkelrät emot basen; så blifva trianglarne på båda sidor om denna vinkelräta linea likformige med hela triangeln, och med hvarandra.

Om vinkeln BAC ärrat, och AD vinkelrät mot BC; så skola trianglarne ABD, ADC och ABC vara likformige med hvarandra.

Bevis. l:o Uti trianglarna ABC och ABD är vinkeln B gemensam för båda; vinkeln BAC = ADB, emedan båda äro räta; derföre måste den tredje vinkeln C = BAD. 32 pr. 1.

2:o Uti trianglarna ABC och ACD bevises på samma sätt, att den tredje vinkeln B c DAC.

3:o Uti trianglarna ADB och ADC äro således vinkeln B = DAC, BAD = C samt ADB-ADC.

Alltså äro alla tre trianglarne likvinklige med hvarandra, och således äfven likformige. 4 pr. 6-h. s. b.

 A

D

Bevis. Om icke vinkeln ABC = DEF; så låt ABG

C E F

Emedan då A .= D, och ABG = DEF; så måste AGB^DFE......32 pr. 1.

Men DFE ar spetsig, således är AGB spetsig.

Efter nu trfenglarne ABG och DEF äro likvinklige; så -måste

AB:BG^DE;EF,..... 4 pr. 6.

men......AB:BC = DE:E$; .... hypoth.

derföre måste AB:BG - AB BC, ... 11 pr. 5.

och således . , . . BG ~ BC,....... 9 pr. 5.

samt vinkeln. . . BGC = BCG...... 5 pr. 1.

Nu är vinkeln . BCG spetsig...... hypoth.

derföre skulle vinkeln BGC äfven vara spetsig; och således båda vinklarne AGB och BGC vara

spetsiga, hvilket är omöjligt.......13 pr. 1.

"Alltså kan ej vinkeln ABC vara större, är* DEF; och på samma sätt bevises, att icke AEfc är mindre, än DEF; derföre är ABC = DEF, och således äfven den tredje vinkeln ACB = DFE, h. s b. 32pr.l..

2:o Om vinklarne C och F vore båda trub-bige, och man antoge, att vinkeln ABG = DE F; så bevises på samma sätt, att båda vinklarne BCG och BGC skulle vara trubbige r hvilket äfven är omöjligt............-. *......17 pr. 1.

Således kan icke heller L denna händelse vinkeln ABC vara större, eller anindre än DEF; hvadan trianglarne måste vara likvinklige; h. s. b^.

3:o Om vinklarne C och F vore båda räta, så vore de lika stora; och då är det klart, att den tredje vinkeln ABC = DEF.

WIII Proposition. Theorem.

Om uti en rätvinklig triangel en ritt linea drages 9 från den räta vinkelns spets, vinkelrät emot basen; så blifva trianglarne på båda sidor om denna vinkelräta linea likformige med hela triangeln, och med hvarandra.

Om vinkeln BAC ärrat, och AD vinkelrät mot BC; så skola trianglarne ABD, ADC och ABC vara likformige med hvarandra.

Bevis. l:o Uti trianglarna ABC och ABD är vinkeln B gemensam för båda; vinkeln BAC = ADB, emedan båda äro räta; derföre måste den tredje vinkeln C = BAD. 32 pr. 1.

2:o Uti trianglarna ABC och ACD bevises på samma sätt, att den tredje vinkeln B c DAC.

3:o Uti trianglarna ADB och ADC äro således vinkeln B = DAC, BAD = C samt ADB-ADC.

Alltså äro alla tre trianglarne likvinklige med hvarandra, och således äfven likformige. 4 pr. 6-h. s. b.

Corollarium. Häraf följer, att den vinkelräta lineen är medlersta proportionalen till basens delar; och att hvar och en af sidorna \ uti den rätvinkliga triangeln är medlersta proportionalen till hela basen, och den delen af basen , som är närmast sidan.

Ty om man tager proportionen imellan si- * dorna omkring de räta vinklarna uti de likformiga trianglarna ADB

och ADC; så erhåller man

BD:DArDA:DC;

och om man tager proportionen imellan sidorna omkring vifikeln B uti trianglarna ABC och ABD, så får man . . BC:BA = BÄ:BD;

samt omkring vinkeln C, uti trianglarna ABC och \ ACD; sa f år man BC:CA = CA:CD.

IX Proposition. Problem,

Att skära af hvad del, som begäres, of en gifven rät linea.

& Att skära af en tredjedel af AB.

Drag AC, gör AD = DE-EC, sammanbind C med B, och drag EG, DF parallela med CB; så skall det bevisas, att AF är en tredjedel af AB.

Bevis. . . DC:AD = FB:AF ..... 2 pr. 6.

Men nu är . . DC ^2 AD;

derföre måste .... FB = 2AF, (förklar, öfver 3

defin. 5); och således är ... AB = 3AF, h, s. b.

Alt sltär a en gifven 'TO* linea i samma forhållande, som en annan gifven rät linea är skuren.

G

B

N.

-*!

Att skära AB så, att dess delar förhålla sig såsom

AD:DE:EC.

Man ställer AB så, att hon gör en vinkel med AC, sammanbinder B och C, samt drager DF och EG parallela med BC; så skall det bevisas, att AF:FG = AD:DE, och att FG:GB =DE:EC.

Bevis. Drag DK parallel med FB.

Emedan FD är parallel med GE; så måste AF:FG-AD:DE; .... 2 pr. 6.

Vidare, emedan FH och GK äro parallelogrammer; så måste

FG = DH, GB = HK . . . 84pr.l. och då HE är parallel med KC, måste

DH:HK = DE:EC .... 2 pr. 6.

d. v. s. FG:GB = DE:EC, h. s. b. . . . 7 pr. 5.

XI Proposition. Problem.

Alt finna tredje proportionalen till Z;ne gifna räta lineer AB och AC.

Corollarium. Häraf följer, att den vinkelräta lineen är medlersta proportionalen till basens delar; och att hvar och en af sidorna \ uti den rätvinkliga triangeln är medlersta proportionalen till hela basen, och den delen af basen ,

som är närmast sidan.

Ty om man tager proportionen imellan si- * dorna omkring de räta vinklarna uti de likformiga trianglarna ADB och ADC; så erhåller man

BD:DArDA:DC;

och om man tager proportionen imellan sidorna omkring vifikeln B uti trianglarna ABC och ABD, så får man . . BC:BA = BÄ:BD;

samt omkring vinkeln C, uti trianglarna ABC och \ ACD; sa f år man BC:CA = CA:CD.

IX Proposition. Problem,

Att skära af hvad del, som begäres, of en gifven rät linea.

& Att skära af en tredjedel af AB.

Drag AC, gör AD = DE-EC, sammanbind C med B, och drag EG, DF parallela med CB; så skall det bevisas, att AF är en tredjedel af AB.

Bevis. . . DC:AD = FB:AF ..... 2 pr. 6.

Men nu är . . DC ^2 AD;

derföre måste .... FB = 2AF, (förklar, öfver 3

defin. 5); och således är ... AB = 3AF, h, s. b.

Alt sltär a en gifven 'TO* linea i samma forhållande, som en annan gifven rät linea är skuren.

G

B

N.

-*!

Att skära AB så, att dess delar förhålla sig såsom

AD:DE:EC.

Man ställer AB så, att hon gör en vinkel med AC, sammanbinder B och C, samt drager DF och EG parallela med BC; så skall det bevisas, att AF:FG = AD:DE, och att FG:GB =DE:EC.

Bevis. Drag DK parallel med FB.

Emedan FD är parallel med GE; så måste AF:FG-AD:DE; .... 2 pr. 6.

Vidare, emedan FH och GK äro parallelogrammer; så måste

FG = DH, GB = HK . . . 84pr.l. och då HE är parallel med KC, måste

DH:HK = DE:EC .... 2 pr. 6.

d. v. s. FG:GB = DE:EC, h. s. b. . . . 7 pr. 5.

XI Proposition. Problem.

Alt finna tredje proportionalen till Z;ne gifna räta lineer AB och AC.

Corollarium. Häraf följer, att den vinkelräta lineen är medlersta proportionalen till basens delar; och att hvar och en af sidorna \ uti den rätvinkliga triangeln är medlersta proportionalen till hela basen, och den delen af basen , som är närmast sidan.

Ty om man tager proportionen imellan si- * dorna omkring de räta vinklarna uti de likformiga trianglarna ADB och ADC; så erhåller man

BD:DArDA:DC;

och om man tager proportionen imellan sidorna omkring vifikeln B uti trianglarna ABC och ABD, så får man . . BC:BA = BÄ:BD;

samt omkring vinkeln C, uti trianglarna ABC och \ ACD; sa f år man BC:CA = CA:CD.

IX Proposition. Problem,

Att skära af hvad del, som begäres, of en gifven rät linea.

& Att skära af en tredjedel af AB.

Drag AC, gör AD = DE-EC, sammanbind C med B, och drag EG, DF parallela med CB; så skall det bevisas, att AF är en tredjedel af AB.

Bevis. . . DC:AD = FB:AF ..... 2 pr. 6.

Men nu är . . DC ^2 AD;

derföre måste .... FB = 2AF, (förklar, öfver 3

defin. 5); och således är ... AB = 3AF, h, s. b.

Alt sltär a en gifven 'TO* linea i samma forhållande, som en annan gifven rät linea är skuren.

G

B

N.

-*!

Att skära AB så, att dess delar förhålla sig såsom

AD:DE:EC.

Man ställer AB så, att hon gör en vinkel med AC, sammanbinder B och C, samt drager DF och EG parallela med BC; så skall det bevisas, att AF:FG = AD:DE, och att FG:GB =DE:EC.

Bevis. Drag DK parallel med FB.

Emedan FD är parallel med GE; så måste AF:FG-AD:DE; .... 2 pr. 6.

Vidare, emedan FH och GK äro parallelogrammer; så måste

FG = DH, GB = HK . . . 84pr.l. och då HE är parallel med KC, måste

DH:HK = DE:EC .... 2 pr. 6.

d. v. s. FG:GB = DE:EC, h. s. b. . . . 7 pr. 5.

XI Proposition. Problem.

Alt finna tredje proportionalen till Z;ne gifna räta lineer AB och AC.

Corollarium. Häraf följer, att den vinkelräta lineen är medlersta proportionalen till basens delar; och att hvar och en af sidorna \ uti den rätvinkliga triangeln är medlersta proportionalen till hela basen, och den delen af basen , som är närmast sidan.

Ty om man tager proportionen imellan si- * dorna omkring de räta vinklarna uti de likformiga trianglarna ADB och ADC; så erhåller man

BD:DArDA:DC;

och om man tager proportionen imellan sidorna omkring vifikeln B uti trianglarna ABC och ABD, så får man . . BC:BA = BÄ:BD;

samt omkring vinkeln C, uti trianglarna ABC och \ ACD; sa f år man BC:CA = CA:CD.

IX Proposition. Problem,

Att skära af hvad del, som begäres, of en gifven rät linea.

& Att skära af en tredjedel af AB.

Drag AC, gör AD = DE-EC, sammanbind C med B, och drag EG, DF parallela med CB; så skall det bevisas, att AF är en tredjedel af AB.

Bevis. . . DC:AD = FB:AF ..... 2 pr. 6.

Men nu är . . DC ^2 AD;

derföre måste .... FB = 2AF, (förklar, öfver 3

defin. 5); och således är ... AB = 3AF, h, s. b.

 HL Proposition»,,. Problem.

Alt sltär a en gifven 'TO* linea i samma forhållande, som en annan gifven rät linea är skuren.

G

B

N.

-*!

Att skära AB så, att dess delar förhålla sig såsom

AD:DE:EC.

Man ställer AB så, att hon gör en vinkel med AC, sammanbinder B och C, samt drager DF och EG parallela med BC; så skall det bevisas, att AF:FG = AD:DE, och att FG:GB =DE:EC.

Bevis. Drag DK parallel med FB.

Emedan FD är parallel med GE; så måste AF:FG-AD:DE; .... 2 pr. 6.

Vidare, emedan FH och GK äro parallelogrammer; så måste

FG = DH, GB = HK . . . 84pr.l. och då HE är parallel med KC, måste

DH:HK = DE:EC .... 2 pr. 6.

d. v. s. FG:GB = DE:EC, h. s. b. . . . 7 pr. 5.

XI Proposition. Problem.

Alt finna tredje proportionalen till Z;ne gifna räta lineer AB och AC.

Man ställer AB så, att hon gör en vinkel med AC, drager ut AB a?h AC, gör BD = AC, sammanbinder B och C, samt drager DE parallel med BC;

Bevis, så måste

AB:BD = AC:CE 2 pr. 6. eller då. . . BDzzAC,

AB:AC=AC:CE. 7 pr. 5.

hvadan CE är den sökta tredje proportionalen.

XII Proposition. Problem.

Att finna fjerde proportionolen till tre gifna räta lineer A> B och C.

B

Man drager 2:ne räta lineer DE och DF, som göra en vinkel med hvarandra; tager sedan

sammanbinder G med H;

samt drager EF parallel i F med GH; hvaraf följer,

att.......DG:GE = DH:HF.....2 pr. 6.

d. v. s.......A:B = C:HF;

hvadan HF är den sökta fjerde proportionalen.

XIII Proposition. Problem. ,

Att finna medlersta proportionalen till 2:ne gifna räta lineer AB och CB.

Man ställer de båda gifna lineerna uti en rät linea AC, uppritar på henne en halfcirkel, och

A B C drager BE vinkelrät mot AC;

så skall det bevisas, att

AB:BE = BE:BC.

Bevis. Drag AE och EC.

Emedan då AEC är en rätvinklig triangel....................31 pr. 3.

och EB är vinkelrät mot AC; så måste

AB:BE = BE.BC, h. s. b. ... Cor. 8 pr. 6. Således är BE den sökta medlersta proportionalen.

Proposition. Theorem.

Uti lika stora parallelogrammer, som hafva hvar sin lika stor vinkel, äro sidorna omkring de lika stora vinklar-^ na proportionella tvärtemot F G hvarandra; och de parallelogrammer., som hafva hvar sin lika stor vinkel9 och sidorna omkring de lika stora vinklarna proportionella tvärtemot hvarandra., äro lika stora.

l:o Om parallelogrammen AD~EF, och vinkeln BDC = EDF; så skall det bevisas, att

CD:DE = DF:DB .... 2 def. 6.

Bevis. Om parallelogrammens AD och EF ställas så, att CD och DE komma uti en rät linea, så är enligt hypothésen vinkeln

Man ställer AB så, att hon gör en vinkel med AC, drager ut AB a?h AC, gör BD = AC, sammanbinder B och C, samt drager DE parallel med BC;

Bevis, så måste

AB:BD = AC:CE 2 pr. 6. eller då. . . BDzzAC,

AB:AC=AC:CE. 7 pr. 5.

hvadan CE är den sökta tredje proportionalen.

XII Proposition. Problem.

Att finna fjerde proportionolen till tre gifna räta lineer A> B och C.

B

Man drager 2:ne räta lineer DE och DF, som göra en vinkel med hvarandra; tager sedan

sammanbinder G med H;

samt drager EF parallel i F med GH; hvaraf följer,

att.......DG:GE = DH:HF.....2 pr. 6.

d. v. s.......A:B = C:HF;

hvadan HF är den sökta fjerde proportionalen.

XIII Proposition. Problem. ,

Att finna medlersta proportionalen till 2:ne gifna räta lineer AB och CB.

Man ställer de båda gifna lineerna uti en rät linea AC, uppritar på henne en halfcirkel, och

A B C drager BE vinkelrät mot AC;

så skall det bevisas, att

AB:BE = BE:BC.

Bevis. Drag AE och EC.

Emedan då AEC är en rätvinklig triangel....................31 pr. 3.

och EB är vinkelrät mot AC; så måste

AB:BE = BE.BC, h. s. b. ... Cor. 8 pr. 6. Således är BE den sökta medlersta proportionalen.

Proposition. Theorem.

Uti lika stora parallelogrammer, som hafva hvar sin lika stor vinkel, äro sidorna omkring de lika stora vinklar-^ na proportionella tvärtemot F G hvarandra; och de parallelogrammer., som hafva hvar sin lika stor vinkel9 och sidorna omkring de lika stora vinklarna proportionella tvärtemot hvarandra., äro lika stora.

l:o Om parallelogrammen AD~EF, och vinkeln BDC = EDF; så skall det bevisas, att

CD:DE = DF:DB .... 2 def. 6.

Bevis. Om parallelogrammens AD och EF ställas så, att CD och DE komma uti en rät linea, så är enligt

hypothésen vinkeln

Man ställer AB så, att hon gör en vinkel med AC, drager ut AB a?h AC, gör BD = AC, sammanbinder B och C, samt drager DE parallel med BC;

Bevis, så måste

AB:BD = AC:CE 2 pr. 6. eller då. . . BDzzAC,

AB:AC=AC:CE. 7 pr. 5.

hvadan CE är den sökta tredje proportionalen.

XII Proposition. Problem.

Att finna fjerde proportionolen till tre gifna räta lineer A> B och C.

B

Man drager 2:ne räta lineer DE och DF, som göra en vinkel med hvarandra; tager sedan

sammanbinder G med H;

samt drager EF parallel i F med GH; hvaraf följer,

att.......DG:GE = DH:HF.....2 pr. 6.

d. v. s.......A:B = C:HF;

hvadan HF är den sökta fjerde proportionalen.

XIII Proposition. Problem. ,

Att finna medlersta proportionalen till 2:ne gifna räta lineer AB och CB.

Man ställer de båda gifna lineerna uti en rät linea AC, uppritar på henne en halfcirkel, och

A B C drager BE vinkelrät mot AC;

så skall det bevisas, att

AB:BE = BE:BC.

Bevis. Drag AE och EC.

Emedan då AEC är en rätvinklig triangel....................31 pr. 3.

och EB är vinkelrät mot AC; så måste

AB:BE = BE.BC, h. s. b. ... Cor. 8 pr. 6. Således är BE den sökta medlersta proportionalen.

Proposition. Theorem.

Uti lika stora parallelogrammer, som hafva hvar sin lika stor vinkel, äro sidorna omkring de lika stora vinklar-^ na proportionella tvärtemot F G hvarandra; och de parallelogrammer., som hafva hvar sin lika stor vinkel9 och sidorna omkring de lika stora vinklarna proportionella tvärtemot hvarandra., äro lika stora.

l:o Om parallelogrammen AD~EF, och vinkeln BDC = EDF; så skall det bevisas, att

CD:DE = DF:DB .... 2 def. 6.

Bevis. Om parallelogrammens AD och EF ställas så, att CD och DE komma uti en rät linea, så är enligt hypothésen vinkeln

Man ställer AB så, att hon gör en vinkel med AC, drager ut AB a?h AC, gör BD = AC, sammanbinder B och C, samt drager DE parallel med BC;

Bevis, så måste

AB:BD = AC:CE 2 pr. 6. eller då. . . BDzzAC,

AB:AC=AC:CE. 7 pr. 5.

hvadan CE är den sökta tredje proportionalen.

XII Proposition. Problem.

Att finna fjerde proportionolen till tre gifna räta lineer A> B och C.

B

Man drager 2:ne räta lineer DE och DF, som göra en vinkel med hvarandra; tager sedan

sammanbinder G med H;

samt drager EF parallel i F med GH; hvaraf följer,

att.......DG:GE = DH:HF.....2 pr. 6.

d. v. s.......A:B = C:HF;

hvadan HF är den sökta fjerde proportionalen.

XIII Proposition. Problem. ,

Att finna medlersta proportionalen till 2:ne gifna räta lineer AB och CB.

Man ställer de båda gifna lineerna uti en rät linea AC, uppritar på henne en halfcirkel, och

A B C drager BE vinkelrät mot AC;

så skall det bevisas, att

AB:BE = BE:BC.

Bevis. Drag AE och EC.

Emedan då AEC är en rätvinklig triangel.....................31 pr. 3.

och EB är vinkelrät mot AC; så måste

AB:BE = BE.BC, h. s. b. ... Cor. 8 pr. 6. Således är BE den sökta medlersta proportionalen.

Proposition. Theorem.

Uti lika stora parallelogrammer, som hafva hvar sin lika stor vinkel, äro sidorna omkring de lika stora vinklar-^ na proportionella tvärtemot F G hvarandra; och de parallelogrammer., som hafva hvar sin lika stor vinkel9 och sidorna omkring de lika stora vinklarna proportionella tvärtemot hvarandra., äro lika stora.

l:o Om parallelogrammen AD~EF, och vinkeln BDC = EDF; så skall det bevisas, att

CD:DE = DF:DB .... 2 def. 6.

Bevis. Om parallelogrammens AD och EF ställas så, att CD och DE komma uti en rät linea, så är enligt hypothésen vinkeln

BDC = EDF och således BDC + BDE = EDF +BDE = 2:ne

räta....................13 pr. 1.

hvadan FD och DB äro uti en rät linea 14 pr. 1.

Om man då fullbordar parallelogrammen BE;

så måste . . . AD:BE = CD:DE,.....l pr. 6.

men då AD = EF, så är AD:BE = EF:BE; 7 pr. 5. alltså måste . EF:BE = CD-.DE, ... 11 pr. 5.

men.....EF:BE = DF:DB; .... l pr. 6.

derföre måste CD:DE = DF:DB, h. s. b. 11 pr. 5.

2 o Om vinkeln

BDC=EDF,

och.....CD:DE = DF:DB;

så skall det bevisas, att parallelogrammen AD=EF.

Bevis. Ty då

CD:DE = DF:DB, . .

och......AD:BE = CD:DE; . .

så måste . . . AD:BE = DF:DB . . Men.....DF:DB=EF:BE. . .

derföre måste AD:BE = EF:BE, . hvadan ..... AD = EF, h. s.

b.

hypoth.

l pr. 6. 11 pr. 5.

l pr. 6. 11 pr. 5.

9 pr. 5.

X. V Proposition. Theorem.

Uti lika stora trianglar, som hafva hvar sin lilta stor vinkel, äro sidorna omkring de lika stora vinklarna proportionella tvärtemot hvarandra; och de trianglar, som hafva hvar sin lika stor vinkel, och sidorna omkring de lika si or a vinklarna proportionella tvärtemot hvarandra, äro lika stora.

l:o Om triangeln ABC = AED, och vinkeln BAC = DAE; så skall det bevisas, att AB:AD = AE:AC.

B E

trianglarna så, att AB och AD linea! så måste, äfven AE och linea. Drag CD.

Emedan då triang. ABC = så måste tri. ABC: tri. ACD =

men ... tri. ABC: tri. ACD = derföre rnå-

rte--------tri. AED: tri. ACD =

och då . tri. AED: tri. ACD = så måste . . AB:AD = AE:AC

Bevis. Ställ i komma uti en rät AC vara uti en rät

= AED . hypoth. tri. AED: tri. ACD 7 pr.».

AB:AD; . lPr 6'

AB.AD; .Upt.5-AE.AC, lPr-«-h. s. b. 11 Pr- 5"

2:o Om vinkeln BAC = DAE, och om AB:AD = AE:AC;

så skall det bevisas, att triangeln ABC = AED.

Bevis. Emedan AB:AD = AE:AC hypoth. och ... AB:AD = tri. ABC: tri. ADC. . l pr. 6. sa måste AE:AC = tri. ABC: tri. ADC . . 11 pr. 5. Mennuär AE: AC = tri. ADE: tri. ADC, . l pr. 6. derföreärtri. ABC: tri. ADC = tri. ADE: tri. ADC

11 pr. 5.

och således triangeln ABC =: ADE, h, s. b. 9 pr. 5. 172

Sjette Boken.

BDC = EDF och således BDC + BDE = EDF +BDE = 2:ne

räta....................13 pr. 1.

hvadan FD och DB äro uti en rät linea 14 pr. 1.

Om man då fullbordar parallelogrammen BE;

så måste . . . AD:BE = CD:DE,.....l pr. 6.

men då AD = EF, så är AD:BE = EF:BE; 7 pr. 5. alltså måste . EF:BE = CD-.DE, ... 11 pr. 5.

men.....EF:BE = DF:DB; .... l pr. 6.

derföre måste CD:DE = DF:DB, h. s. b. 11 pr. 5.

2 o Om vinkeln

BDC=EDF,

och.....CD:DE = DF:DB;

så skall det bevisas, att parallelogrammen AD=EF.

Bevis. Ty då

CD:DE = DF:DB, . .

och......AD:BE = CD:DE; . .

så måste . . . AD:BE = DF:DB . . Men.....DF:DB=EF:BE. . .

derföre måste AD:BE = EF:BE, . hvadan ..... AD = EF, h. s.

b.

hypoth.

l pr. 6. 11 pr. 5.

l pr. 6. 11 pr. 5.

9 pr. 5.

X. V Proposition. Theorem.

Uti lika stora trianglar, som hafva hvar sin lilta stor vinkel, äro sidorna omkring de lika stora vinklarna

proportionella tvärtemot hvarandra; och de trianglar, som hafva hvar sin lika stor vinkel, och sidorna omkring de lika si or a vinklarna proportionella tvärtemot hvarandra, äro lika stora.

l:o Om triangeln ABC = AED, och vinkeln BAC = DAE; så skall det bevisas, att AB:AD = AE:AC.

B E

trianglarna så, att AB och AD linea! så måste, äfven AE och linea. Drag CD.

Emedan då triang. ABC = så måste tri. ABC: tri. ACD =

men ... tri. ABC: tri. ACD = derföre rnå-

rte--------tri. AED: tri. ACD =

och då . tri. AED: tri. ACD = så måste . . AB:AD = AE:AC

Bevis. Ställ i komma uti en rät AC vara uti en rät

= AED . hypoth. tri. AED: tri. ACD 7 pr.».

AB:AD; . lPr 6'

AB.AD; .Upt.5-AE.AC, lPr-«-h. s. b. 11 Pr- 5"

2:o Om vinkeln BAC = DAE, och om AB:AD = AE:AC;

så skall det bevisas, att triangeln ABC = AED.

Bevis. Emedan AB:AD = AE:AC hypoth. och ... AB:AD = tri. ABC: tri. ADC. . l pr. 6. sa måste AE:AC = tri. ABC: tri. ADC . . 11 pr. 5. Mennuär AE: AC = tri. ADE: tri. ADC, . l pr. 6. derföreärtri. ABC: tri. ADC = tri. ADE: tri. ADC

11 pr. 5.

och således triangeln ABC =: ADE, h, s. b. 9 pr. 5.

X.VI Proposition* Theorem.

Om fyra räta lineer äro proportionella, så är rectangeln af de båda yttersta lika stor med rectangeln af de båda medlerst a; och om rectangeln af de båda yttersta är lika stor med rectangeln af de båda medlersta, så skola de fyra räta lineerna vara proportionella* (27 prop. 5).

l:o Om AB:CD=CF:BE,

och om figurerna AE och DF äro rectanglar; så skall det bevisas, att

___ Bevis. Emedan AE och

B E F C DF äro rectanglar; så äro

vinklarne vid E och C lika stora; och emedan det är antaget att sidorna omkring dessa lika stora vinklar äro proportionella tvärtemot hvarandra, nämligen

AB:CD = CF:BE; så måste ....AE = DF, h. s. b.. 14 pr. 6.

2:o Om rectangeln AE = rectangeln DF; så måste sidorna omkring de lika stora vinklarna E och C vara proportionella tvärtemot hvarandra: d. v, s. att

AB:CD = CF:BE, h. s. b. . 14 pr. 6,

X¥II Proposition. Theorem.

Om tre räta lineer äro proportionella, sä är rectangeln af de båda yttersta lika stor

med qvadraten af den medlerst a ; och om rectangeln af de båda yttersta är lika stor med qvadraten af den medlersta> så skola de tre räta lineerna vara proportionella. (28 prop. 5.)

D

B

D

l:o Om A:B = B:C; så skall det bevisas, att rectang. A.C=qvadr.B2.

Bevis. Man antager en rät linea D = B.

Emedan då A:B = B:C; så måste

A:B = D:C.....; . 7 pr. 5.

och således . . . A.C = B.D ....16 pr. 6,

d. v. s......A.C = B2, h. s. b.

2:oX)m

att

= B2; så skall det bevisas,

Bevis. Ty om man antager D~B; så är rect. B.D = B2;

men nu är ...... A.C = B2...... hypoth.

således äfven.....A.C'= B.D;

hvadan ....A:B=D:G .... 16 pr. 6.

eller..........A:B=B:C, h, s. b. 7 pr. 5.

Definition.

Likformige figurer sägas vara lika ställde,, hvar och en pä sin räta linea., om de båda lineerna äro homologa termer uti sidor- 174

X.VI Proposition* Theorem.

Om fyra räta lineer äro proportionella, så är rectangeln af de båda yttersta lika stor med rectangeln af de båda medlerst a; och om rectangeln af de båda yttersta är lika stor med rectangeln af de båda medlersta, så skola de fyra räta lineerna vara proportionella* (27 prop. 5).

l:o Om AB:CD=CF:BE,

och om figurerna AE och DF äro rectanglar; så skall det bevisas, att

___ Bevis. Emedan AE och

B E F C DF äro rectanglar; så äro

vinklarne vid E och C lika stora; och emedan det är antaget att sidorna omkring dessa lika stora vinklar äro proportionella tvärtemot hvarandra, nämligen

AB:CD = CF:BE; så måste ....AE = DF, h. s. b.. 14 pr. 6.

2:o Om rectangeln AE = rectangeln DF; så måste sidorna omkring de lika stora vinklarna E och C vara proportionella tvärtemot hvarandra: d. v, s. att

AB:CD = CF:BE, h. s. b. . 14 pr. 6,

X¥II Proposition. Theorem.

Om tre räta lineer äro proportionella, sä är rectangeln af de båda yttersta lika stor

med qvadraten af den medlerst a ; och om rectangeln af de båda yttersta är lika stor med qvadraten af den medlersta> så skola de tre räta lineerna vara proportionella. (28 prop. 5.)

D

B

D

l:o Om A:B = B:C; så skall det bevisas, att rectang. A.C=qvadr.B2.

Bevis. Man antager en rät linea D = B.

Emedan då A:B = B:C; så måste

A:B = D:C.....; . 7 pr. 5.

och således . . . A.C = B.D ....16 pr. 6,

d. v. s......A.C = B2, h. s. b.

2:oX)m

att

= B2; så skall det bevisas,

Bevis. Ty om man antager D~B; så är rect. B.D = B2;

men nu är ...... A.C = B2...... hypoth.

således äfven.....A.C'= B.D;

hvadan ....A:B=D:G .... 16 pr. 6.

eller..........A:B=B:C, h, s. b. 7 pr. 5.

Definition.

Likformige figurer sägas vara lika ställde,, hvar och en pä sin räta linea., om de båda lineerna äro homologa termer uti sidor-

X.VI Proposition* Theorem.

Om fyra räta lineer äro proportionella, så är rectangeln af de båda yttersta lika stor med rectangeln af de båda medlerst a; och om rectangeln af de båda yttersta är lika stor med rectangeln af de båda medlersta, så skola de fyra räta lineerna vara proportionella* (27 prop. 5).

l:o Om AB:CD=CF:BE,

och om figurerna AE och DF äro rectanglar; så skall det bevisas, att

___ Bevis. Emedan AE och

B E F C DF äro rectanglar; så äro

vinklarne vid E och C lika stora; och emedan det är antaget att sidorna omkring dessa lika stora vinklar äro proportionella tvärtemot hvarandra, nämligen

AB:CD = CF:BE; så måste ....AE = DF, h. s. b.. 14 pr. 6.

2:o Om rectangeln AE = rectangeln DF; så måste sidorna omkring de lika stora vinklarna E och C vara proportionella tvärtemot hvarandra: d. v, s. att

AB:CD = CF:BE, h. s. b. . 14 pr. 6,

X¥II Proposition. Theorem.

Om tre räta lineer äro proportionella, sä är rectangeln af de båda yttersta lika stor

med qvadraten af den medlerst a ; och om rectangeln af de båda yttersta är lika stor med qvadraten af den medlersta> så skola de tre räta lineerna vara proportionella. (28 prop. 5.)

D

B

D

l:o Om A:B = B:C; så skall det bevisas, att rectang. A.C=qvadr.B2.

Bevis. Man antager en rät linea D = B.

Emedan då A:B = B:C; så måste

A:B = D:C.....; . 7 pr. 5.

och således . . . A.C = B.D ....16 pr. 6,

d. v. s......A.C = B2, h. s. b.

2:oX)m

att

= B2; så skall det bevisas,

Bevis. Ty om man antager D~B; så är rect. B.D = B2;

men nu är ...... A.C = B2...... hypoth.

således äfven.....A.C'= B.D;

hvadan ....A:B=D:G .... 16 pr. 6.

eller..........A:B=B:C, h, s. b. 7 pr. 5.

Definition.

Likformige figurer sägas vara lika ställde,, hvar och en pä sin räta linea., om de båda lineerna äro homologa termer uti sidor-176

nas proportion. (Se följ. figur) t. ex. Figuren ÄG är lika ställd på AB, som C E på CD; men ÄG är lika ställd på AH, som CE på CF; emedan

ABtAH = CD:CF.

IL! Ill Proposition. Problem.

Att på en gifven rät linea, AB, upprita en figur, som är likformig mid engifvenrät-llnig Jigur, CE, och som är lika

ställd på AB, som CE är ställd pä CD.

Man delar den gifna rätlini-ga figuren CE uti trianglar, ge-

nom

A B C D

nalen DF; afritar sedan uti A och B, vid AB,

vinkeln H \B~FCD, och vinkeln HBA^FDC;

samt uti H och B, vid HB,

vinkeln GHB = EFD, och vinkeln GBH = EDF;

så skall det bevisas, att ÄG är likformig med

CE5 och lika ställd på AB, som CE på CD.

Bevis. Emedan vinklarne

HAB-FCD, och HBA-FDC; så måste .... AHB = CFD .... 32 pr. l,

På samma sätt bevises, att vinkeln G = E. Häraf följer, att hela vinkeln AHG = CFE, och

att hela vinkeln ABG = CDE. Alltså äro figu-rerne ÄG och C E likvinklige.

Emedan vidare trianglarne AHB och CFD äro likvinklige; så måste

AB:BH = CD:DF .... 4 pr. 6. och emedan trianglarne HBG och FDE äro likvinklige; så måste

BH:BG = DF:DE .... 4 pr. 6. Efter då .... AB.BH = CD:DF,

och.......BH:BG = DF:DE;

så måste .... AB:BG-CD:DE .... 22 pr. 5. På lika sätt bevises, att AH:HG = CF:FE; och emedan trianglarne HGB och FED äro likvinklige, så måste äfven

HG:GB = FE:ED .... 4 pr. 6. Alltså äro sidorna omkring de lika stora vinklarna proportionella, och figurerne således likformige, samt ÄG lika ställd på AB, som CE på CD; h. s. b.

Proposition. Theorem.

Likformige trianglar hafva till hvarandra ett dupliceradt forhållande af det, som deras homologa sidor hafva till hvarandra.

Om trianglarne ABC och DEF äro likformige , så att vinkeln B = E och

AB:BC = DE:EF;

så skall det bevisas, att triangeln ABC har till triangeln DEF ett förhållande, som är dupliceradt af BC:EF. 176

nas proportion. (Se följ. figur) t. ex. Figuren ÄG är lika ställd på AB, som C E på CD; men ÄG är lika ställd på AH, som CE på CF; emedan

ABtAH = CD:CF.

IL! Ill Proposition. Problem.

Att på en gifven rät linea, AB, upprita en figur, som är likformig mid engifvenrät-llnig Jigur, CE, och som är lika ställd på AB, som CE är ställd pä CD.

Man delar den gifna rätlini-ga figuren CE uti trianglar, ge-

nom

A B C D

nalen DF; afritar sedan uti A och B, vid AB,

vinkeln H \B~FCD, och vinkeln HBA^FDC;

samt uti H och B, vid HB,

vinkeln GHB = EFD, och vinkeln GBH = EDF;

så skall det bevisas, att ÄG är likformig med

CE5 och lika ställd på AB, som CE på CD.

Bevis. Emedan vinklarne

HAB-FCD, och HBA-FDC; så måste .... AHB = CFD .... 32 pr. l,

På samma sätt bevises, att vinkeln G = E. Häraf följer, att hela vinkeln AHG = CFE, och

att hela vinkeln ABG = CDE. Alltså äro figu-rerne ÄG och C E likvinklige.

Emedan vidare trianglarne AHB och CFD äro likvinklige; så måste

AB:BH = CD:DF .... 4 pr. 6. och emedan trianglarne HBG och FDE äro likvinklige; så måste

BH:BG = DF:DE .... 4 pr. 6. Efter då .... AB.BH = CD:DF,

och.......BH:BG = DF:DE;

så måste .... AB:BG-CD:DE .... 22 pr. 5. På lika sätt bevises, att AH:HG = CF:FE; och emedan trianglarne HGB och FED äro likvinklige, så måste äfven

HG:GB = FE:ED .... 4 pr. 6. Alltså äro sidorna omkring de lika stora vinklarna proportionella, och figurerne således likformige, samt ÄG lika ställd på AB, som CE på CD; h. s. b.

Proposition. Theorem.

Likformige trianglar hafva till hvarandra ett dupliceradt forhållande af det, som deras homologa sidor hafva till hvarandra.

Om trianglarne ABC och DEF äro likformige , så att vinkeln B = E och

AB:BC = DE:EF;

så skall det bevisas, att triangeln ABC har till triangeln DEF ett förhållande, som är dupliceradt af BC:EF. 176

nas proportion. (Se följ. figur) t. ex. Figuren ÄG är lika ställd på AB, som C E på CD; men ÄG är lika ställd på AH, som CE på CF; emedan

ABtAH = CD:CF.

IL! Ill Proposition. Problem.

Att på en gifven rät linea, AB, upprita en figur, som är likformig mid engifvenrät-llnig Jigur, CE, och som är lika ställd på AB, som CE är ställd pä CD.

Man delar den gifna rätlini-ga figuren CE uti trianglar, ge-

nom

A B C D

nalen DF; afritar sedan uti A och B, vid AB,

vinkeln H \B~FCD, och vinkeln HBA^FDC;

samt uti H och B, vid HB,

vinkeln GHB = EFD, och vinkeln GBH = EDF;

så skall det bevisas, att ÄG är likformig med

CE5 och lika ställd på AB, som CE på CD.

Bevis. Emedan vinklarne

HAB-FCD, och HBA-FDC; så måste .... AHB = CFD .... 32 pr. l,

På samma sätt bevises, att vinkeln G = E. Häraf följer, att hela vinkeln AHG = CFE, och

att hela vinkeln ABG = CDE. Alltså äro figu-rerne ÄG och C E likvinklige.

Emedan vidare trianglarne AHB och CFD äro likvinklige; så måste

AB:BH = CD:DF .... 4 pr. 6. och emedan trianglarne HBG och FDE äro likvinklige; så måste

BH:BG = DF:DE .... 4 pr. 6. Efter då .... AB.BH = CD:DF,

och.......BH:BG = DF:DE;

så måste .... AB:BG-CD:DE .... 22 pr. 5. På lika sätt bevises, att AH:HG = CF:FE; och emedan trianglarne HGB och FED äro likvinklige, så måste äfven

HG:GB = FE:ED .... 4 pr. 6. Alltså äro sidorna omkring de lika stora vinklarna proportionella, och figurerne således likformige, samt ÄG lika ställd på AB, som CE på CD; h. s. b.

Proposition. Theorem.

Likformige trianglar hafva till hvarandra ett dupliceradt forhållande af det, som deras homologa sidor hafva till hvarandra.

Om trianglarne ABC och DEF äro likformige , så att vinkeln B = E och

AB:BC = DE:EF;

så skall det bevisas, att triangeln ABC har till triangeln DEF ett förhållande, som är dupliceradt af BC:EF.118

/ 1 \

Sjette Boken.

Bevis. Låt BG vara tredje proportionalen till BCochEF; så att

BC:EF = EF:BG ; 11 pr. 6.

AG

^ 6.

Emedan då AB:BC = DE:EF, : . , så måste. . . : : AB:DE=BC:EF, 16 pr. 5.

men nu är ... BC:EF = EF:BG; derföre måste. . AB:DE = EF:BG; : U pr. 5, samt således triang. ABG = DEF . . . . . 15 pr. b. Alltså måste triangeln

ABC:ABG = ABC:DEF ; . l pr. 5.

men : . . ABC:ABG = BC:BG, l

således måste ,_

äfven ____ ABC:DEF = BC:BG. : H

Men förhållandet BC:BG är dupliceradt ai

BC:EF

Emedan . : . . . BC:EF = EF:BG . . .

Alltså har triangeln ABC till DEF ett duplice-

radt förhållande af BC.EF, h. s. b.

TLJL Proposition. Theorem.

Likformige månghörningar kunna deltts uti lika många trianglar, af hvilka två och två äro likformige med hvarandra och homo-löga med hela månghörningarna ; och likformige månghörningar hafva till hvarandra ett förhållande, som är dupliceradt af det , som deras homologa sidor hafva till hvarandra.

Om månghörningarne ABCDE ochFGHKL äro likformige, och man från spetsarna af tvänne lika stora vinklar5 B och G, drager diago-nalerna BE, BD, GL, GK; så skall det bevisas:

l:o Att triangeln ABE är likformig med FGL, BED med GLK, och BDC med GKH.

Bevis. Emedan månghörningarne äro likformige; så är vinkeln Ac^F och AB:AE=FG:FL; hvaraf följer, att triangeln ABE är likvinklig med triangeln FGL, 6 pr. 6; och således likformig med honom, 4 pr. 6.

Vidare, eftersom månghörningarne äro likformige, så är vinkeln

AED = FLK; och det redan är bevist, att vink. AEB = FLG; derföre är vinkeln BED = GLK. Dessutom är, till följe af trianglarnes likformighet

BE:AE = GL:FL, . : 4 pr. 6.

samt , ... AE:ED = FL:LK, till följe af mång-hörningarnes likformighet; alltså måste

BE:ED = GL:LK; .... 22 pr. 5. d. v. s. att sidorna omkring de lika stora vink- 118

/ 1 \

Sjette Boken.

Sjette Boken.

Bevis. Låt BG vara tredje proportionalen till BCochEF; så att

BC:EF = EF:BG ; 11 pr. 6.

AG

^ 6.

Emedan då AB:BC = DE:EF, : . , så måste. . . : : AB:DE=BC:EF, 16 pr. 5.

men nu är ... BC:EF = EF:BG; derföre måste. . AB:DE = EF:BG; : U pr. 5, samt således triang. ABG = DEF . . . . . 15 pr. b. Alltså måste triangeln

ABC:ABG = ABC:DEF ; . l pr. 5.

men : . . ABC:ABG = BC:BG, l

således måste ,_

äfven ____ ABC:DEF = BC:BG. : H

Men förhållandet BC:BG är dupliceradt ai

BC:EF

Emedan . : . . . BC:EF = EF:BG . . .

Alltså har triangeln ABC till DEF ett duplice-

radt förhållande af BC.EF, h. s. b.

TLJL Proposition. Theorem.

Likformige månghörningar kunna deltts uti lika många trianglar, af hvilka två och två äro likformige med hvarandra och homo-löga med hela månghörningarna ; och likformige månghörningar hafva till hvarandra ett förhållande, som är dupliceradt af det , som deras homologa sidor hafva till hvarandra.

Om månghörningarne ABCDE ochFGHKL äro likformige, och man från spetsarna af tvänne lika stora vinklar5 B och G, drager diago-nalerna BE, BD, GL, GK; så skall det bevisas:

l:o Att triangeln ABE är likformig med FGL, BED med GLK, och BDC med GKH.

Bevis. Emedan månghörningarne äro likformige; så är vinkeln Ac^F och AB:AE=FG:FL; hvaraf följer, att triangeln ABE är likvinklig med triangeln FGL, 6 pr. 6; och således likformig med honom, 4 pr. 6.

Vidare, eftersom månghörningarne äro likformige, så är vinkeln

AED = FLK; och det redan är bevist, att vink. AEB = FLG; derföre är vinkeln BED = GLK. Dessutom är, till följe af trianglarnes likformighet

BE:AE = GL:FL, . : 4 pr. 6.

samt , ... AE:ED = FL:LK, till följe af mång-hörningarnes likformighet; alltså måste

BE:ED = GL:LK; .... 22 pr. 5. d. v. s. att sidorna omkring de lika stora vink-180

larna BED och GLK äro proportionella, hvadan triangeln BED är likvinklig och likformig med GLK. 6 och 4 pr. 6.

På samma sätt bevises, att triangeln BDC är likvinklig och likformig med GKH; o, s. v., om flere trianglar finnas, att två och två äro likformige, h. s. b»

2:o Det skall bevisas, att dessa likformiga trianglar äro homologa med de hela; sä att den ena månghörningen förhåller sig till den andra månghörningen, såsom en triangel,, uti den förra, förhåller sig till den med honom likformiga triangeln uti den andra månghörningen; d. v. s. att månghörningen AC:FH = ABE:FGL = BED-.GLK = BDO.GKH.

Bevis. Triangeln ABE har till triangeln FGL ett dupliceradt förhållande af det, som BE har till GL, 19 prop. 6; och samma förhållande har triangeln BED till GLK; alltså måste

tri. ABE:FGL = BED-.GLK . * 11 pr 5.

På samma sätt bevises, att

BED :GLK = BDO.GKH.

Då således ABE:FGL = BED:GLK = BDC:GKH; så måste ABE + BED + BDO.FGL + GLK + GKH = ABE:FGL = BED:GLK = BDO.GKH 12 pr. 5. d. v. s. att hela månghörningen AC:FH = ABE:FGL = BED:GLK = BDOGKH; h. s. b.

3:o Det skall bevisas, att månghörningen AC har till månghörningen FH ett dupliceradt förhållande af det som

AB har till FG.

Bevis. Månghörn. AC har till månghorn. FH samma förhållande som triangeln ABE har till triang. FGL; men triangeln har till triangeln ett dupliceradt förhållande af AB:FG, 19 prop. t6; derföre måste äfven månghorn. hafva till månghörningen ett dupliceradt förhållande af AB:FG, h. s. b.

Coroll. 1. Om tre räta lineer äro proportionella; så har figuren på den första till den likformiga och lika ställda figuren på den andra samma förhållande, som den första lineen har till den tredje.

Ty den första lineen har till den tredje ett dupliceradt förhållande af det, som den första har till den andra, 10 def. 5; och figuren på den första har till figuren på den andra äfvenledes ett dupliceradt förhållande af det, som den första lineen har till den andra.

Coroll. 2. Om man på tvänne gifna räta lineer uppritar likformiga och lika ställda trianglar, qvadrater, femhörningar, sexhörnin-gar, o. s.'v.9 så är triangeln till triangeln som qvadraten till qvadraten, som femhörnin-gen till femhörningen. o. s. v.

Dessa likformiga ytor hafva till hvarandra ett dupliceradt förhållande af det, som de gifna lineerna hafva till hvarandra;"och kunde man således i allmänhet benämna ett dupliceradt förhållande yt förhållande. Imedlertid, som, bland alla dessa figurer, qvadrater äro lättast att beräkna och alltid lika ställda, begagnar man, i stället182

Sjette Boken.

for uttrycket dupliceradt förhållande, lika ofta uttrycket qvadratiskt förhållande, hvilket äfvenledes öfverensstämmer med 26 prop. 5. Cor. 1.

C oroll. 3. Om sidorna AB och FG vore commensurabla; så att t. ex.

3.AB-4.FG;

så måste.....9.AB = 16.FG*; och således äfven

9.AC-16.FH,

Fore således AB dubbelt sä stor som FG; så vore figuren pä AB fyra gånger så stor, som figuren på FG; vore AB sju gånger sä stor som FG; sä vore figuren 49 gånger sä stor, som figuren; vore AB IQ gånger sä stor som FG, så vore figuren 100 gånger sä stor som figuren, o. s. v*

Proposition. Theorem»

Rätlinige figurer,, som äro likformige med en och samma figur > äro sinsimellan likformige.

Om ABC och GHK äro likformige med DEF; så är ABC likformig med GHK.

Bevis. Ty efter ABC är likformig med DEF; så är vinkeln B = E5 l def. 6. Af lika skäl är vinkeln H = E; således är vinkeln B - H.

På samma sätt bevises, att vinkeln A = G, och att C = K.

H

K

Vidare, emedan ABC är likformig med DEF; så måste

AB:BC=DE:EF, l def. 6.

och emedan DEF är likformig med

11 pr. 5.

B C

GHK; så måste

DE:EF=GH:HK,

hvaraf följer,

att......AB:BC = GH:HK .

På samma sätt bevises, att BC:CA = HK:KG, och att AB:AC = GH:GK.

Alltså hafva ligurerne ABC och GHK vinklarna uti den ena lika stora med hvar sin vinkel uti den andra, och sidorna omkring de lika stora vinklarna proportionella; och således äro dessa figurer likformige; h. s, b.

Theorem*

Om tvänne rcitlinige likformige figurer äro lika stora, så äro deras homologa sidor lika stora; men äro de olika stora, sä är den störres sida större.

Låt AB vara likformig och lika stor med DE; så att

13

så skall ;.;.,, AC = DF 182

Sjette Boken.

Sjette Boken.

for uttrycket dupliceradt förhållande, lika ofta uttrycket qvadratiskt förhållande, hvilket äfvenledes öfverensstämmer med 26 prop. 5. Cor. 1.

C oroll. 3. Om sidorna AB och FG vore commensurabla; så att t. ex.

3.AB-4.FG;

så måste.....9.AB = 16.FG*; och således äfven

9.AC-16.FH,

Fore således AB dubbelt sä stor som FG; så vore figuren pä AB fyra gånger så stor, som figuren på FG; vore AB sju gånger sä stor som FG; sä vore figuren 49 gånger sä stor, som figuren; vore AB IQ gånger sä stor som FG, så vore figuren 100 gånger sä stor som figuren, o. s. v*

Proposition. Theorem»

Rätlinige figurer,, som äro likformige med en och samma figur > äro sinsimellan likformige.

Om ABC och GHK äro likformige med DEF; så är ABC likformig med GHK.

Bevis. Ty efter ABC är likformig med DEF; så är vinkeln B = E5 l def. 6. Af lika skäl är vinkeln H = E; således är vinkeln B - H.

På samma sätt bevises, att vinkeln A = G, och att C = K.

H

K

183

Vidare, emedan ABC är likformig med DEF; så måste

AB:BC=DE:EF, l def. 6.

och emedan DEF är likformig med

11 pr. 5.

B C

GHK; så måste

DE:EF=GH:HK,

hvaraf följer,

att......AB:BC = GH:HK .

På samma sätt bevises, att BC:CA = HK:KG, och att AB:AC = GH:GK.

Alltså hafva ligurerne ABC och GHK vinklarna uti den ena lika stora med hvar sin vinkel uti den andra, och sidorna omkring de lika stora vinklarna proportionella; och således äro dessa figurer likformige; h. s, b.

Theorem*

Om tvänne rcitlinige likformige figurer äro lika stora, så äro deras homologa sidor lika stora; men äro de olika stora, sä är den störres sida större.

Låt AB vara likformig och lika stor med DE; så att

13

så skall ;.;.,, AC = DF184

Sjette Boken.

Bevis. Ty efter AB är likformig med DE; så måste

AB:DE - AC:DF2

D "F 2Cor.20pr.6.

Men nu antages, att AB = DE; derföre måste äfven AC = VF9 d.v. s. AC = DF enl. 2 Theor. näst efter 17 prop 5.

På samma sätt bevises, att, om AB > DE; så iir AC> DF; h. s. b.

Proposition.

Om fyra räta lineer äro proportionella; så äro de på dem lika ställde och likformige rällinige figurer proportionelle.

Om fyra rätlinige figurer äro proportionelle, och två och två af dem likformige; så äro deras homologa sidor proportionella.

l:o Om AB:CD~EF:GH; så skall det be-visas, att . . AKB'CLD = EM:GN.

Bevis. Ty efter AB:CD = EF:GH, så måste AB:CD = ÉF-GH2, (3 Cor. l Probl. 5.). Men

AB:CD2= AICB:CLD, och EF:GH~EM:GN;

2 Cor. 20 pr. 6. derföre måste AKB:<?LB = EM:GN, h. s. b.

11 pr. 5.

2:o Om AKB.-CLD = EM.GN; så skall det bevisas, att AB:CD = EF:GH.

Bevis. Ty efter figurerne äro likformige,så

måste AKB:CLD ="AB:CD,och EM:GN^EF:GH,

(2 Cor. 20 pr. 6).

Men nu är antaget, att AKB.-CLD = EM:EN,

derföre måste äfven AB:CD8=EF:GH . 11 pr. 5. och således AB:CD = E'F:GH, h, s. b. 3 Con l probl. 5.

XXIII Proposition. Theorem.

Likvinklige parallelogrammer hafva till hvarandra ett förhållande, som är sammansatt af deras sidors förhållanden.

Bevis. Ty efter AB är likformig med DE; så måste

AB:DE - AC:DF2

D "F 2Cor.20pr.6.

Men nu antages, att AB = DE; derföre måste äfven AC = VF9 d.v. s. AC = DF enl. 2 Theor. näst efter 17 prop 5.

På samma sätt bevises, att, om AB > DE; så iir AC> DF; h. s. b.

Proposition.

Om fyra räta lineer äro proportionella; så äro de på dem lika ställde och likformige rällinige figurer proportionelle.

Om fyra rätlinige figurer äro proportionelle, och två och två af dem likformige; så äro deras homologa sidor proportionella.

l:o Om AB:CD~EF:GH; så skall det be-visas, att . . AKB'CLD = EM:GN.

Bevis. Ty efter AB:CD = EF:GH, så måste AB:CD = ÉF-GH2, (3 Cor. l Probl. 5.). Men

AB:CD2= AICB:CLD, och EF:GH~EM:GN;

2 Cor. 20 pr. 6. derföre måste AKB:<?LB = EM:GN, h. s. b.

11 pr. 5.

2:o Om AKB.-CLD = EM.GN; så skall det bevisas, att AB:CD = EF:GH.

Bevis. Ty efter figurerne äro likformige,så

måste AKB:CLD ="AB:CD,och EM:GN^EF:GH,

(2 Cor. 20 pr. 6).

Men nu är antaget, att AKB.-CLD = EM:EN,

derföre måste äfven AB:CD8=EF:GH . 11 pr. 5. och således AB:CD = E'F:GH, h, s. b. 3 Con l probl. 5.

XXIII Proposition. Theorem.

Likvinklige parallelogrammer hafva till hvarandra ett förhållande, som är sammansatt af deras sidors förhållanden.

13* 184

Sjette Boken.

Sjette Boken.

185

Bevis. Ty efter AB är likformig med DE; så måste

AB:DE - AC:DF2

D "F 2Cor.20pr.6.

Men nu antages, att AB = DE; derföre måste äfven AC = VF9 d.v. s. AC = DF enl. 2 Theor. näst efter 17 prop 5.

På samma sätt bevises, att, om AB > DE; så iir AC> DF; h. s. b.

Proposition.

Om fyra räta lineer äro proportionella; så äro de på dem lika ställde och likformige rällinige figurer proportionelle.

Om fyra rätlinige figurer äro proportionelle, och två och två af dem likformige; så äro deras homologa sidor proportionella.

l:o Om AB:CD~EF:GH; så skall det be-visas, att . . AKB'CLD = EM:GN.

Bevis. Ty efter AB:CD = EF:GH, så måste AB:CD = ÉF-GH2, (3 Cor. l Probl. 5.). Men

AB:CD2= AICB:CLD, och EF:GH~EM:GN;

2 Cor. 20 pr. 6. derföre måste AKB:<?LB = EM:GN, h. s. b.

11 pr. 5.

2:o Om AKB.-CLD = EM.GN; så skall det bevisas, att AB:CD = EF:GH.

Bevis. Ty efter figurerne äro likformige,så

måste AKB:CLD ="AB:CD,och EM:GN^EF:GH,

(2 Cor. 20 pr. 6).

Men nu är antaget, att AKB.-CLD = EM:EN,

derföre måste äfven AB:CD8=EF:GH . 11 pr. 5. och således AB:CD = E'F:GH, h, s. b. 3 Con l probl. 5.

XXIII Proposition. Theorem.

Likvinklige parallelogrammer hafva till hvarandra ett förhållande, som är sammansatt af deras sidors förhållanden.

Sjette Boken.

Om parallelogram-merne AC och CF äro likvinklige, så att vinkeln BCD-GCE; så skalidet bevisas, att AC har till CF ett förhållande, som är sammansatt af det, som BC har till CG, och af det, som CD har till CE;

BC;CG

CD.CE.

Bevis. Man ställer parallelogrammerna så, att BC och CG komma uti en rät linea, så komma äfven EC och CD uti en rät linea, emedan vertikalvinklarne vid C äro antagne vara lika stora. Derefter fullbordas parallelogrammen DG.

Då måste AC:DG och......DG.CF

hvadan

AC:CF =

BC:CG, ... l pr. 6.

CD:CE;. . . . l pr. 6. (BC:CG ?CD:CE,h. s. b. 22 pr. 5.

Proposition. Theorem.

Uti hvar och en parallelogram äro de parallelogrammer, som stå omkring diagona-len likformige med den hela^ och likformige sinsimellan.

Det skall bevisas, att parallelogrammen GE är likformig med BD, att KH är likformig med BD, och att GE är likformig med KH.

Bevis. Vinkeln EAG är gemensam för parallelogrammerna GE och BD; dessutom, emedan GH är parallel med BC , så måste vinkeln AGF = ABC (29 prop. 1.);

ii K C och emedan de mot-

stående vinklarne uti en parallelogram äro lika stora, så äro alla fyra vinklarne uti GE lika stora med hvar sin vinkel uti BD, (34 prop. 1.). Alltså äro dessa parallelogrammer likvinklige.

Vidare, emedan trianglarne EFA och DCA hafva vinklarna vid E och D lika stora och vinkeln vid A gemensam; så måste dessa båda trianglar vara likvinkliga (32 prop. l.)j äfvensom trianglarne FGA och CBA äro likvinklige. Alltså måste

EF:FA~DC:CA ... 4 pr. 6. och ..... FA:FG = GA:CB; hvadan , . . . EF:FG = DC:CB ..... 22 pr. 5, På samma sätt bevises, att

pr.

6.

Nu är äfven AE:EF = AD:DC .... och ...... AG:GF = AB:BC;

alltså äro GE och BD likvinklige och hafva sidorna omkring de lika stora vinklarna proportionella, hvarföre dessa båda parallelogrammer måste vara likformige, (l def. 6.).

På samma sätt bevises, att parallelogrammen KH äfven är likformig med BD. 186

Sjette Boken.

Sjette Boken.

18»

Om parallelogram-merne AC och CF äro likvinklige, så att vinkeln BCD-GCE; så skalidet bevisas, att AC har till CF ett förhållande, som är sammansatt af det, som BC har till CG, och af det, som CD har till CE;

BC;CG

CD.CE.

Bevis. Man ställer parallelogrammerna så, att BC och CG komma uti en rät linea, så komma äfven EC och CD uti en rät linea, emedan vertikalvinklarne vid C äro antagne vara lika stora. Derefter fullbordas parallelogrammen DG.

Då måste AC:DG och......DG.CF

hvadan

AC:CF =

BC:CG, ... l pr. 6.

CD:CE;. . . . l pr. 6. (BC:CG ?CD:CE,h. s. b. 22 pr. 5.

Proposition. Theorem.

Uti hvar och en parallelogram äro de parallelogrammer, som stå omkring diagona-len likformige med den hela^ och likformige sinsimellan.

Det skall bevisas, att parallelogrammen GE är likformig med BD, att KH är likformig med BD, och att GE är likformig med KH.

Bevis. Vinkeln EAG är gemensam för parallelogrammerna GE och BD; dessutom, emedan GH är parallel med BC , så måste vinkeln AGF = ABC (29 prop. 1.);

ii K C och emedan de mot-

stående vinklarne uti en parallelogram äro lika stora, så äro alla fyra vinklarne uti GE lika stora med hvar sin vinkel uti BD, (34 prop. 1.). Alltså äro dessa parallelogrammer likvinklige.

Vidare, emedan trianglarne EFA och DCA hafva vinklarna vid E och D lika stora och vinkeln vid A gemensam; så måste dessa båda trianglar vara likvinkliga (32 prop. l.)j äfvensom trianglarne FGA och CBA äro likvinklige. Alltså måste

EF:FA~DC:CA ... 4 pr. 6. och ..... FA:FG = GA:CB; hvadan , . . . EF:FG = DC:CB ..... 22 pr. 5, På samma sätt bevises, att

pr.

6.

Nu är äfven AE:EF = AD:DC .... och ...... AG:GF = AB:BC;

alltså äro GE och BD likvinklige och hafva sidorna omkring de lika stora vinklarna proportionella, hvarföre dessa båda parallelogrammer måste vara likformige, (l def. 6.).

På samma sätt bevises, att parallelogrammen KH äfven är likformig med BD.188

Men de rätlinige figurer, som äro likformige med en och samma figur, äro sinsimellan likformige; derföre är parallelogrammen GE likformig med KH5 h. s. b. (21 prop. 6.).

!%ÄY Proposition. Problem.

Alt uppríta en rätlinig figur , som ctr likformig med en gifven rätlinig figur, och lika sior rned en annan gifven rätlinig figur.

Att uppríta en figur, som är likformig med A och lika stor med B.

Man applicerar till CD en parallelogram ED L - A, och till DF en parallelogram FG-B, så att vinkeln GDF =3 DCE, a, Derigenom komma CD och DG uti en rät linea, samt EF och FH uti en rät linea; b.

Nu söker man medleröta proportionalen, KL, till CD och DG, c, och uppritar på KL en figur, M, som är likformig med A, och lika ställd på KL, som A är ställd på CD, d: det skall då bevisas, att M = B.

a. 45 prop. 1. Bevis. Ty då CD:KL = KL:DG;

b. 14 prop. 1. så måste .... A:M-CD:DG e.

c. 13 prop. 6. Men ..... CD:DG:=ED:FG f e l Cor.Ull derföre är ... A:M = ED.FG; g

20 prop. 6. och då vi gjort . . A = ED,

f. l prop. 6. så måste ...... M = FG . . h.

g. 11 prop. 5. Men FG är gjord =: B; derföre h. H prop. 5. mågte M = B h g b

_ F H K

Proposition. TlaeoreAu

Om tvänne parallelogrammer, BD och EG, äro likformige och lika ställde på AD och ÄG, samt hafva en vinkel vid A gemensam; så skola BD och EG stå omkring samma diagonal.

Bevis. Ty om icke AFC är diagonal till BD, så låt AKC vata, det, och fullborda parallelogrammen HG.

Då måste HG och BD vara likformige, a, och således a. 24 prop. 6.

BA:AD = HA:ÄG, b. b. l defin. 6. Men EG är antagen vara likfor- c' 11 PTOP- 5-mig med BD; derföre måste

BA:AD==EA:AG;

hvadan . . EA: ÄG = HA:AG, c; hvilket ar omöjligt; således kan ej diagonalen till BD gå genom K5 eller någon annan punkt på FG,

På samma sätt bevises, att han ej kan gå genom L, eller någon annan punkt på EF; alltså måste han gå genom F, h. s. b.

En parallelogram säges vara applicerad till en gifven rät linea, så att han brister på en figur, om han ej upptager hela den gifna lineen.

Parallelogrammen AF är applicerad till AB, och brister på figuren KM. 188

Sjette Boken.

Men de rätlinige figurer, som äro likformige med en och samma figur, äro sinsimellan likformige; derföre är parallelogrammen GE likformig med KH5 h. s. b. (21 prop. 6.).

!%ÄY Proposition. Problem.

Alt upprita en rätlinig figur , som ctr likformig med en gifven rätlinig figur, och lika sior rned en annan gifven rätlinig figur.

Att upprita en figur, som är likformig med A och lika stor med B.

Man applicerar till CD en parallelogram ED L - A, och till DF en parallelogram FG-B, så att vinkeln GDF =3 DCE, a, Derigenom komma CD och DG uti en rät linea, samt EF och FH uti en rät linea; b.

Nu söker man medleröta proportionalen, KL, till CD och DG, c, och uppritar på KL en figur, M, som är likformig med A, och lika ställd på KL, som A är ställd på CD, d: det skall då bevisas, att M = B.

a. 45 prop. 1. Bevis. Ty då CD:KL = KL:DG;

b. 14 prop. 1. så måste .... A:M-CD:DG e.

c. 13 prop. 6. Men ..... CD:DG:=ED:FG f e l Cor.Ull derföre är ... A:M = ED.FG; g

20 prop. 6. och då vi gjort . . A = ED,

f. l prop. 6. så måste ...... M = FG . . h.

g. 11 prop. 5. Men FG är gjord =: B; derföre h. H prop. 5. mågte M = B h g b

_ F H K

Sjette Boken.

189

Proposition. TlaeoreAu

Om tvänne parallelogrammer, BD och EG, äro likformige och lika ställde på AD och ÄG, samt hafva en vinkel vid A gemensam; så skola BD och EG stå omkring samma diagonal.

Bevis. Ty om icke AFC är diagonal till BD, så låt AKC vata, det, och fullborda parallelogrammen HG.

Då måste HG och BD vara likformige, a, och således a. 24 prop. 6.

BA:AD = HA:ÄG, b. b. l defin. 6. Men EG är antagen vara likfor- c' 11 PTOP- 5-mig med BD; derföre måste

BA:AD==EA:AG;

hvadan . . EA: ÄG = HA:AG, c; hvilket ar omöjligt; således kan ej diagonalen till BD gå genom K5 eller någon annan punkt på FG,

På samma sätt bevises, att han ej kan gå genom L, eller någon annan punkt på EF; alltså måste han gå genom F, h. s. b.

En parallelogram säges vara applicerad till en gifven rät linea, så att han brister på en figur, om han ej upptager hela den gifna lineen.

Parallelogrammen AF är applicerad till AB, och brister på figuren KM. 188

Sjette Boken.

Men de rätlinige figurer, som äro likformige med en och samma figur, äro sinsimellan likformige; derföre är parallelogrammen GE likformig med KH5 h. s. b. (21 prop. 6.).

!%ÄY Proposition. Problem.

Alt upprita en rätlinig figur , som ctr likformig med en gifven rätlinig figur, och lika sior rned en annan gifven rätlinig figur.

Att upprita en figur, som är likformig med A och lika stor med B.

Man applicerar till CD en parallelogram ED L - A, och till DF en parallelogram FG-B, så att vinkeln GDF =3 DCE, a, Derigenom komma CD och DG uti en rät linea, samt EF och FH uti en rät linea; b.

Nu söker man medleröta proportionalen, KL, till CD och DG, c, och uppritar på KL en figur, M, som är likformig med A, och lika ställd på KL, som A är ställd på CD, d: det skall då bevisas, att M = B.

a. 45 prop. 1. Bevis. Ty då CD:KL = KL:DG;

b. 14 prop. 1. så måste .... A:M-CD:DG e.

c. 13 prop. 6. Men ..... CD:DG:=ED:FG f e l Cor.Ull derföre är ... A:M = ED.FG; g

20 prop. 6. och då vi gjort . . A = ED,

f. l prop. 6. så måste ...... M = FG . . h.

g. 11 prop. 5. Men FG är gjord =: B; derföre h. H prop. 5. mågte M = B h g b

_ F H K

Sjette Boken.

189

Proposition. TlaeoreAu

Om tvänne parallelogrammer, BD och EG, äro likformige och lika ställde på AD och ÄG, samt hafva en vinkel vid A gemensam; så skola BD och EG stå omkring samma diagonal.

Bevis. Ty om icke AFC är diagonal till BD, så låt AKC vata, det, och fullborda parallelogrammen HG.

Då måste HG och BD vara likformige, a, och således a. 24 prop. 6.

BA:AD = HA:ÄG, b. b. l defin. 6. Men EG är antagen vara likfor- c' 11 PTOP- 5-mig med BD; derföre måste

BA:AD==EA:AG;

hvadan . . EA: ÄG = HA:AG, c; hvilket ar omöjligt; således kan ej diagonalen till BD gå genom K5 eller någon annan punkt på FG,

På samma sätt bevises, att han ej kan gå genom L, eller någon annan punkt på EF; alltså måste han gå genom F, h. s. b.

En parallelogram säges vara applicerad till en gifven rät linea, så att han brister på en figur, om han ej upptager hela den gifna lineen.

Parallelogrammen AF är applicerad till AB, och brister på figuren KM. 190

Sjette Boken.

1LXWII Proposition. Theorem.

Af alla de parallelogrammer, AF, ÄG $ AH o. s. v., som appliceras till en gif ven rät linea i AB, så att brister ne KM, LC, EN äro likformige och lika ställde, är ÄG störst, som uppritas pä halfva AB, och som är likformig med sin brist LC.

Bevis. l:o CF = FL, a; men PL > FL; derföre är, PL > CF. Nu är af'en PL = P V, b; och således P V > CF. Lägger man då AP till på båda ställen; så blifver ÄG > AF, h. s. b.

:.>

A N C M B 2:° GIV = GE zz GS 5

a. 43 prop. 1. a & b; men GS > HV; derföre är

b. 36 prop. 1. äfven GN > HV. Lägger man då VN till på båda ställen; så blifver ÄG > AH, h. s. b.

Sj e tte Boken.

191

Låt AB vara den gifna räta lineen, och den gifne rätlinige figuren lika stor med qvadraten EL5 a.

Skär AB midtitu uti C och upprita på AC en halfcirkel, gör AD = AE, drag DC; gör sedan CF = CD och

upprita qvadraten FG, samt fullborda rectangeln

AH:

så skall det bevisas, att AH = EL.

Bevis. Emedan AB är skuren midtitu uti C, och uti tvänne olika delar i F; så måste

d. v. s. och då,

så måste eller . .

=C, b,. . a. U prop. 2.

_ t _ 2 _ 2 b. 5 prop. 2.

. AH + CF=AD+CD,c, c. 31 prop. 3

. ADn:AEochCD = CF; o. 47 prop. 1.

_ 2 _ 2 _ 2 d. 3 axiom. AH+CF = AE + CF

AH=~ÄE=EL5 d, h. s. b.

HLH.WIH Proposition. Problem.

XXIX

* Problem,

Att till en gifven rät linea applicera en rectangel, som är lika stor med en gifven rällinig figur 9 och som brister med en qva-drat; med förbehåll, att den gifna figuren ej är större, än qvadraten på halfva lineen.

Att till en gifven rät linea applicera en rectangel, som är lika stor med en gifven rät-Imig figur, och som öfverskjuter med ~" qvadrat.

1LXWII Proposition. Theorem.

Af alla de parallelogrammer, AF, ÄG $ AH o. s. v., som appliceras till en gif ven rät linea i AB, så att brister ne KM, LC, EN äro likformige och lika ställde, är ÄG störst, som uppritas pä halfva AB, och som är likformig med sin brist LC.

Bevis. l:o CF = FL, a; men PL > FL; derföre är, PL > CF. Nu är af'en PL = P V, b; och således P V > CF. Lägger man då AP till på båda ställen; så blifver ÄG > AF, h. s. b.

:.>

A N C M B 2:° GIV = GE zz GS 5

a. 43 prop. 1. a & b; men GS > HV; derföre är

b. 36 prop. 1. äfven GN > HV. Lägger man då VN till på båda ställen; så blifver ÄG > AH, h. s. b.

Låt AB vara den gifna räta lineen, och den gifne rätlinige figuren lika stor med qvadraten EL5 a.

Skär AB midtitu uti C och upprita på AC en halfcirkel, gör AD = AE, drag DC; gör sedan CF = CD och

upprita qvadraten FG, samt fullborda rectangeln

AH:

så skall det bevisas, att AH = EL.

Bevis. Emedan AB är skuren midtitu uti C, och uti tvänne olika delar i F; så måste

d. v. s. och då,

så måste eller . .

=C, b,. . a. U prop. 2.

_ t _ 2 _ 2 b. 5 prop. 2.

. AH + CF=AD+CD,c, c. 31 prop. 3

. ADn:AEochCD = CF; o. 47 prop. 1.

_ 2 _ 2 _ 2 d. 3 axiom. AH+CF = AE + CF

AH=~ÄE=EL5 d, h. s. b.

HLH.WIH Proposition. Problem.

XXIX

* Problem,

Att till en gifven rät linea applicera en rectangel, som är lika stor med en gifven rällinig figur 9 och som brister med en qva-drat; med förbehåll, att den gifna figuren ej är större, än qvadraten på halfva lineen.

Att till en gifven rät linea applicera en rectangel, som är lika stor med en gifven rät-Imig figur, och som öfverskjuter med ~" qvadrat.

en 190

Sjette Boken.

1LXWII Proposition. Theorem.

Af alla de parallelogrammer, AF, ÄG $ AH o. s. v., som appliceras till en gif ven rät linea i AB, så att brister ne KM, LC, EN äro likformige och lika ställde, är ÄG störst, som uppritas pä halfva AB, och som är likformig med sin brist LC.

Bevis. l:o CF = FL, a; men PL > FL; derföre är, PL > CF. Nu är af'en PL = P V, b; och således P V > CF. Lägger man då AP till på båda ställen; så blifver ÄG > AF, h. s. b.

:.>

A N C M B 2:° GIV = GE zz GS 5

a. 43 prop. 1. a & b; men GS > HV; derföre är

b. 36 prop. 1. äfven GN > HV. Lägger man då VN till på båda ställen; så blifver ÄG > AH, h. s. b.

Sj e tte Boken.

191

Låt AB vara den gifna räta lineen, och den gifne rätlinige figuren lika stor med qvadraten EL5 a.

Skär AB midtitu uti C och upprita på AC en halfcirkel, gör AD = AE, drag DC; gör sedan CF = CD och

upprita qvadraten FG, samt fullborda rectangeln

AH:

så skall det bevisas, att AH = EL.

Bevis. Emedan AB är skuren midtitu uti C, och uti tvänne olika delar i F; så måste

d. v. s. och då,

så måste eller . .

=C, b,. . a. U prop. 2.

_ t _ 2 _ 2 b. 5 prop. 2.

. AH + CF=AD+CD,c, c. 31 prop. 3

. ADn:AEochCD = CF; o. 47 prop. 1.

_ 2 _ 2 _ 2 d. 3 axiom. AH+CF = AE + CF

AH=~ÄE=EL5 d, h. s. b.

HLH.WIH Proposition. Problem.

XXIX

* Problem,

Att till en gifven rät linea applicera en rectangel, som är lika stor med en gifven rällinig figur 9 och som brister med en qva-drat; med förbehåll, att den gifna figuren ej är större, än qvadraten på halfva lineen.

Att till en gifven rät linea applicera en rectangel, som är lika stor med en gifven rät-Imig figur, och som öfverskjuter med ~" qvadrat.

en192

Sjette Boken.

E c

H

Låt AB vara den gifne räta lineen, och |G den gifne rätlinige figuren lika stor med qvadraten AL, a.

D

a. 14 prop. 2. Skär AB midtitu uti C, drag

b. 6 prop. 2. CD, och gör CF - CD; upprita

c. 47 prop. 1. qvadraten BH, och fullborda rect-

d. 3 axiom. * i /ttr.

ängeln AH:

så skall det bevisas, att AH = AL.

Bevis. Emedan AB är skuren midtitu uti C, och BP sammanfogad med henne ända rätt fram, så måste

d. v. s eller . d. v. s

AC = CD* . . AH + ÄC=ÄXHÄD8c, . . AH=ÄD2=AL, d; h. s. b.

Proposition. Problem.

Att skära en gifven rät linea så, att hela lineen förhäller sig till den större delen, som den större delen förhåller sig till den mindre.

Sjette Boken.

Låt AB vara den gifna räta lineen. Skär henne så att rectangeln af AB och BC är a. 11 prop. 2. lika stor med *>. 17 Pr°P- 6-qvadraten på AC; så skall det bevisas; att

AB:AC = AC.BC.

Bevis. Ty då AB.BC =

så måste . . AB:AC = AC.BC, b; h. s. b.

X3LXJE Proposition. Theorem*

Uti rätvinkliga trianglar är figuren, som uppritas på hypothenusan^ lika stor med de båda figurerna tillsammantagna, som uppritas pä de båda öfriga sidorna., och som med den förra äro likformige och lika ställde.

Låt triangeln ABC vara rätvinklig vid A och låt figurerna E, F och G vara likformiga och lika ställda på BC, AC och AB; sä skall det bevisas, att E=F + G.

Bevis. Drag AD vinkelrät mot BC.

Då måste BD:AB = AB-.BC, Cor. 8 pr. 6. och således . . BD:BC = G:E ...... 20 pr. 8.

192

Sjette Boken.

E c

H

Låt AB vara den gifne räta lineen, och |G den gifne rätlinige figuren lika stor med qvadraten AL, a.

D

a. 14 prop. 2. Skär AB midtitu uti C, drag

b. 6 prop. 2. CD, och gör CF - CD; upprita

c. 47 prop. 1. qvadraten BH, och fullborda rect-

d. 3 axiom. * i /ttr.

ängeln AH:

så skall det bevisas, att AH = AL.

Bevis. Emedan AB är skuren midtitu uti C, och BP sammanfogad med henne ända rätt fram, så måste

d. v. s eller . d. v. s

AC = CD* . . AH + ÄC=ÄXHÄD8c, . . AH=ÄD2=AL, d; h. s. b.

Proposition. Problem.

Att skära en gifven rät linea så, att hela lineen förhäller sig till den större delen, som den större delen förhåller sig till den mindre.

Sjette Boken.

Låt AB vara den gifna räta lineen. Skär henne så att rectangeln af AB och BC är a. 11 prop. 2. lika stor med *>. 17 Pr°P- 6-qvadraten på AC; så skall det bevisas; att

AB:AC = AC.BC.

Bevis. Ty då AB.BC =

så måste . . AB:AC = AC.BC, b; h. s. b.

X3LXJE Proposition. Theorem*

Uti rätvinkliga trianglar är figuren, som uppritas på hypothenusan^ lika stor med de båda figurerna tillsammantagna, som uppritas pä de båda öfriga sidorna., och som med den förra äro likformige och lika ställde.

Låt triangeln ABC vara rätvinklig vid A och låt figurerna E, F och G vara likformiga och lika ställda på BC, AC och AB; sä skall det bevisas, att E=F + G.

Bevis. Drag AD vinkelrät mot BC.

Då måste BD:AB = AB-.BC, Cor. 8 pr. 6. och således . . BD:BC = G:E ...... 20 pr. 8.

192

Sjette Boken.

E c

H

Låt AB vara den gifne räta lineen, och |G den gifne rätlinige figuren lika stor med qvadraten AL, a.

D

a. 14 prop. 2. Skär AB midtitu uti C, drag

b. 6 prop. 2. CD, och gör CF - CD; upprita

c. 47 prop. 1. qvadraten BH, och fullborda rect-

d. 3 axiom. * i /ttr.

ängeln AH:

så skall det bevisas, att AH = AL.

Bevis. Emedan AB är skuren midtitu uti C, och BP sammanfogad med henne ända rätt fram, så måste

d. v. s eller . d. v. s

AC = CD* . . AH + ÄC=ÄXHÄD8c, . . AH=ÄD2=AL, d; h. s. b.

Proposition. Problem.

Att skära en gifven rät linea så, att hela lineen förhäller sig till den större delen, som den större delen förhåller sig till den mindre.

Sjette Boken.

Låt AB vara den gifna räta lineen. Skär henne så att rectangeln af AB och BC är a. 11 prop. 2. lika stor med *>. 17 Pr°P- 6-qvadraten på AC; så skall det bevisas; att

AB:AC = AC.BC.

Bevis. Ty då AB.BC =

så måste . . AB:AC = AC.BC, b; h. s. b.

X3LXJE Proposition. Theorem*

Uti rätvinkliga trianglar är figuren, som uppritas på hypothenusan^ lika stor med de båda figurerna tillsammantagna, som uppritas pä de båda öfriga sidorna., och som med den förra äro likformige och lika ställde.

Låt triangeln ABC vara rätvinklig vid A och låt figurerna E, F och G vara likformiga och lika ställda på BC, AC och AB; sä skall det bevisas, att E=F + G.

Bevis. Drag AD vinkelrät mot BC.

Då måste BD:AB = AB-.BC, Cor. 8 pr. 6. och således . . BD:BC = G:E ...... 20 pr. 8.

194

Sjette Boken.

På samma sätt bevises, att

CD:BC = F:E, hvaraf följer att . . BD + CD:BC = G + F:E

24 pr. 5,

Men BD -f CD^BC, derföre måste G -f F =r E, 2 Theor. efter 16 pr. 5; h. s. b.

Proposition. Theorem.

Om tvänne trianglar hafva tvä sidor uti den ena proportionella med tvä sidor uti den andra., och kunna ställas tillhopa ull ett hörn sä, att de homologa sidorna blifva par alle-la;---sä skola de båda öfriga sidorna vara uti en rät linea.

A Låt AB:AC = DC:DE5 och

\ AB vara parallel med DC, och

AC med DE: det skall då bevi-sas, att BC och CE äro uti en B c E rät linea.

Bevis. Emedan AB är parallel med DC,

a. 29 prop. 1. och AC parallel med DE; så äro

b. 6 prop 6. vinklarne

c. 14 prop. 1. A = ACD~CDE; .... a och då, enligt hypothésen, sidorna omkring de lika stora vinklarna A och D äro proportionella, så måste trianglarne vara likvinklige, b.

Då således vinklarne

ABC = DCE, samt ... ABC 4- DCB = 2:ne räta . . . , a

Sjette Boken.

195

så måste äfven DCE -f- DCB = 2:ne räta;

och till följe deraf BC vara uti en rät linea med

CE, c; h. s. b.

Proposition. Theorem*

Uti lika stora cirklar hafva vinklarne till hvarandra samma förhållande , som bågarne på hvilka de stå, antingen de bada stå vid medelpunkten 3 eller båda vid peripherien. Samma förhållande hafva äfven sectorerne till hvarandra.

l:o Om radierna. BF = HP, så skall det Bevisas, att vinkeln BFC är till HPK som bågen BC är till bågen HK; och att vinkeln A är till G äfven som BC är till HK.

Bevis. Tag hvilken mångfaldig BCDE som heldst af BC, så att BC-CD-DE; så blifva vinklarne BFC = CFD = DFE, a; och alltså vinkeln BFE lika mångfaldig af BFC, som bågen BE är af BC.

På samma sätt kan vinkeln HP1V vara hvilken lika mångfaldig som heldst af HPK, som bågen HN är af HK;

så att, om BFE = m. BFC, så är BE = m. BC; och om . . HPN = n. HPK, så är HN = n, HK. Men nu är . . BFE > = < HPN allteftersom ... BE > = < HN, a;

194

Sjette Boken.

På samma sätt bevises, att

CD:BC = F:E, hvaraf följer att . . BD + CD:BC = G + F:E

24 pr. 5,

Men BD -f CD^BC, derföre måste G -f F =r E, 2 Theor. efter 16 pr. 5; h. s. b.

Proposition. Theorem.

Om tvänne trianglar hafva tvä sidor uti den ena proportionella med tvä sidor uti den andra., och kunna ställas tillhopa ull ett hörn sä, att de homologa sidorna blifva par alle-la;---sä skola de båda öfriga sidorna vara uti en rät linea.

A Låt AB:AC = DC:DE5 och

\ AB vara parallel med DC, och

AC med DE: det skall då bevi-sas, att BC och CE äro uti en B c E rät linea.

Bevis. Emedan AB är parallel med DC,

a. 29 prop. 1. och AC parallel med DE; så äro

b. 6 prop 6. vinklarne

c. 14 prop. 1. A = ACD~CDE; .... a och då, enligt hypothésen, sidorna omkring de lika stora vinklarna A och D äro proportionella, så måste trianglarne vara likvinklige, b.

Då således vinklarne

ABC = DCE, samt ... ABC 4- DCB = 2:ne räta . . . , a

så måste äfven DCE -f- DCB = 2:ne räta;

och till följe deraf BC vara uti en rät linea med

CE, c; h. s. b.

Proposition. Theorem*

Uti lika stora cirklar hafva vinklarne till hvarandra samma förhållande , som bågarne på hvilka de stå, antingen de bada stå vid medelpunkten 3 eller båda vid peripherien. Samma förhållande hafva äfven sectorerne till hvarandra.

l:o Om radierna. BF = HP, så skall det Bevisas, att vinkeln BFC är till HPK som bågen BC är till bågen HK; och att vinkeln A är till G äfven som BC är till HK.

Bevis. Tag hvilken mångfaldig BCDE som heldst af BC, så att BC-CD-DE; så blifva vinklarne BFC = CFD = DFE, a; och alltså vinkeln BFE lika mångfaldig af BFC, som bågen BE är af BC.

På samma sätt kan vinkeln HP1V vara hvilken lika mångfaldig som heldst af HPK, som bågen HN är af HK;

så att, om BFE = m. BFC, så är BE = m. BC; och om . . HPN = n. HPK, så är HN = n, HK. Men nu är . . BFE > = < HPN allteftersom ... BE > = < HN, a;

På samma sätt bevises, att

CD:BC = F:E, hvaraf följer att . . BD + CD:BC = G + F:E

24 pr. 5,

Men BD -f CD^BC, derföre måste G -f F =r E, 2 Theor. efter 16 pr. 5; h. s. b.

Proposition. Theorem.

Om tvänne trianglar hafva tvä sidor uti den ena proportionella med tvä sidor uti den andra., och kunna ställas tillhopa ull ett hörn sä, att de homologa sidorna blifva par alle-la;---sä skola de båda öfriga sidorna vara uti en rät linea.

A Låt AB:AC = DC:DE5 och

\ AB vara parallel med DC, och

AC med DE: det skall då bevi-sas, att BC och CE äro uti en B c E rät linea.

Bevis. Emedan AB är parallel med DC,

a. 29 prop. 1. och AC parallel med DE; så äro

b. 6 prop 6. vinklarne

c. 14 prop. 1. A = ACD~CDE; .... a och då, enligt hypothésen, sidorna omkring de lika stora vinklarna A och D äro proportionella, så måste trianglarne vara likvinklige, b.

Då således vinklarne

ABC = DCE, samt ... ABC 4- DCB = 2:ne räta . . . , a

så måste äfven DCE -f- DCB = 2:ne räta;

och till följe deraf BC vara uti en rät linea med

CE, c; h. s. b.

Proposition. Theorem*

Uti lika stora cirklar hafva vinklarne till hvarandra samma förhållande , som bågarne på hvilka de stå, antingen de bada stå vid medelpunkten 3 eller båda vid peripherien. Samma förhållande hafva äfven sectorerne till hvarandra.

l:o Om radierna. BF = HP, så skall det Bevisas, att vinkeln BFC är till HPK som bågen BC är till bågen HK; och att vinkeln A är till G äfven som BC är till HK.

Bevis. Tag hvilken mångfaldig BCDE som heldst af BC, så att BC-CD-DE; så blifva vinklarne BFC = CFD = DFE, a; och alltså vinkeln BFE lika mångfaldig af BFC, som bågen BE är af BC.

På samma sätt kan vinkeln HP1V vara hvilken lika mångfaldig som heldst af HPK, som bågen HN är af HK;

så att, om BFE = m. BFC, så är BE = m. BC; och om . . HPN = n. HPK, så är HN = n, HK. Men nu är . . BFE > = < HPN allteftersom ... BE > = < HN, a;

d. v. s. . . . m.BFC > = < n.HPK allteftersom . m. BC > = < n. HK, ehuru mångfaldiga de än må tagas, derföre måste BFC:HPK = BC:HK, b; h. s. b.

Vinkeln BFC är dubbelt så stor som A, och

a. 27 pr öp. 3. HPK är dubbelt så stor som G, c;

b. 5 defin. 5. derföre måste äfven

S". ?5 5.

A:G=BC:HK,d;h...b.

2;o Om radierna BF = HP, så skall det bevisas, att sectorn BFC-.HPK = bågen BC:HK.

Bevis. Om samma construction bibehålles, så måste sectorerna BFC - CFD == DFE ; ty om de läggas på hvarandra måste de till alla delar träffa in med hvarandra, eftersom alla radierne och bågarne äro lika stora.

På samma sätt blifva alla sectorerne

HPK = KPL = LPM = MPN. Derföre om sectorn BFE = m. BFC; så är bågen BE = m.BC; och örn sectorn APN=: n, HPK; så är bågen HIV = n. HK.

Om nu sectorn BFE lägges på sectorn HPN,, så att F faller på P och FB utefter PH, så måste B falla på H och bågen BE utefter HN, emedan alla radierna i båda cirklarna äro lika stora; hvaraf följer, att

sectorn BFE > = < HPN, allteftersom bågen BE > .= < HN ; d. v. s. att . . m.BFC > = < n.HPK; allteftersom . . , m. BE > = < n. HK , ehuru

mångfaldiga de än må tagas, hvadan

sectorn BFC:HPK = bågen BC:HK, d; h. s. b.

1. Corollarium» Vinkeln vid medelpunkten förhåller sig till fyra räta vinklar, som den båge, på hvilken han står 9 förhåller s/g till hela peripherien.

Ty då en rät vinkel upptager en fjärdedel af peripherien, 6 prop. 4; så måste vinkeln BCD förhålla sig till en rät, som bågen BC till fjerdedelen af peripherien; och om man då tager den 2:dra och 4:de termen i denna analogi 4 gånger; så måste vinkeln förhålla sig till fyra räta, soin bågen, på hvilken han står, förhåller sig till hela peripherien.

Corollarium 2. Cirkelbågar af olika stora'cirklar, på hvilka lika stora vinklar stå, hafva samma förhållande till deras hela pe-ripherier, eller utgöra lika stora delar, hvqr och en af sin peripheri.

Ty bågen DE förhåller sig till sin hela peripheri, som vinkeln A till fyra räta; och samma förhållande har äfven bågen BC till hela sin peripheri.

Corollarium 3. Sectorn förhåller sig till sectorn, som vinkeln till vinkeln.

Corollarium 4. En cirkelsector förhåller sig till hela cirkelns yta, som den båge, på hvilken han står, förhåller sig till hela peripherien.

till Hste Boken,

l Proposition.

l:o Trianglar, som hafva lika stora baser, förhälla sig till hvarandra, som deras höjder.

A Då en triangel är gifven, kan

man alltid på hans bas upprita en rätvinklig- triangel, som är lika stor med honom (3T: 1).

Låt derföre cle gifna trianglarne B C vara ABC, DEC, båda rätvinkliga

vid B; så äro AB, DB deras höjder, om man tager BC till deras bas; men wn man tager AB, DB såsom trianglarnes baser; så blifver BC gemensam höjd för dem; hvadan

Tiiang. ABCrDBC = AB:DB, h. s. b.

2:o Trianglar hafva till hvarandra ett sammansatt förhållande af det, som deras höjder haf va till hvarandra, och af det, som deras baser hafva till hvarandra.

Om man kallar den ena triangeln, hans bas och höjd

T, B, H

och den andra triangeln, hans bas och höjd t, b,-h;

samt antager en tredje triangel, som, med sin bas och höjd, vore

T; fi, h;

d. v. s. att denna tredje triangel har samma bas, som den förste, och samma höjd som den jftpdre ; så måste ..... TYT = H:h 1:O,

och .... T':t = B:b . . . . . > > * P*. 6;

samt således T:t = j *** |=H.B:h.b/22 pr. 5.

3:o På samma sätt bevises, att parallelogrammer hafva till hvarandra ett förhållande, som är sammansätt af deras höjders och basers forhållande ; så att om parallelogrammer-ila äro P, p ; så måste

2 Propos*

tro Ruta lineer skäras af parallela lineer så, att delarne blifva proportionella; men räta lineer skäras af en cirkelperipheri så, att delarne blifva proportionella tvärtemot hvarandra*

Ty då BD är parallel med EC, så är triangeln ABD likformig med ACE, oeh således AB: AD = AC:AE.

14

Men uti cirkeln är

AB AC = AD.AE 35 och 37 pr. 3.

hvadan AB:AD = AE:AC

16 pr. 6.

2:o Om räta lineerna BD, CE äro parallela, och .

AB:BD = AC:CE

samt AB och BC äro uti en rät linea; så skola äfven punkterna A, D, E vara uti en rät linea.

Ty om man genom D drager DF parallel med AC, så blifva trianglarne ABD, DFE lik-vinklige och vinkeln ADB = DEF; men nu äro

BDE + DEF = 2:ne räta vinklar; derföre måste BDE + ADB = 2:ne räta vinklar; och alltså AD. och DE vara uti en rät linea.

3 Propos,

4

Om man antager AB = a, AC=b, och BD == x; så blifver DC = c-x, samt a : b = x:c - x,

hvadan x = BD = a.c/a+b och DC = b.c/a+b 7 P r o p o s.

Trianglarne ABC, ABD hafva båda vinkeln B = F , och AB:AC = AB:AD = EF:EG; men den

(Bilden saknas)

tredje vinkeln G är spetsig, och uti triangeln ABD är den tredje vinkeln ADB trubbig. Uteslates således tillägget, att den tredje vinkeln uti båda trianglarna skall vara trubbig, eller uti båda icke trubbig; så är det tvätydigi, huruvida man uti propositionen påstår, att det är triangeln ABD eller ABC, som skall vara likvinklig med triangeln EFG.

Denna tvätydighet eger icke rum, om vinklarne B, F stå emot de större af de proportionella sidorna; emedan en peripheri, med AC till radie, icke kan skära BC mer än i punkten C, om AC > AB.

14 och 15 Propos,

Att till en gifven rät linea AB applicera en parallelogram, som är lika stor med en gifven parallelogram AD, och som har en vinkel A gemensam med honom.

Drag BF och CE parallel med BF, samt fullborda parlelle-logrammen AG; så måste han vara lika stor med AD;

emedan

AB:AF = AC:AE ; .... 2 pr. 6.

18 Propos

V* en och samma räta linea kan man upp rHa lika många, olika stora, rätliniga figurer, al-*a likformiga med en gifven rätiinig figur, som don gifna rätliniga figuren har olika stora sidor, *>oh far att urskilja hvilken af dessa olika sto ra 'figurer man menar, nyttjas uttrycket: lika «'.

Bland dessa olika stora figurer är den störst,

p r. -~M«or.

25 P r o p os.

Aii upprita enjigur, som är likformig d rätliniga Jiguren AB och t. ex. 2| gån-r sä stor som AB,

Drag ut AC, så att CD = 2| AC, upprita på AD en halfcirkel, och drag CE vinkelrät mot AD, så blifver den figur, som uppritas på CE, och som är likformig med AB, samt lika ställd på CE som AB ar ställd på AC, 2j gånger så stor som AB.

Ty ... AC.CE = CE.CD . ... 13 pr. 6

och således AB: figurenpåCE=AC:CD!Cor: 20p.6. mm 2A. ACr:CD, derföre måste 2^. AB = figuren

på CF; h. s. b.

27, 28, 29 och 30 Propos.

28 prop. Låt den gifna räta lineen AB ^p, och den gifna qvadratens sida AE^=a; kalla FB = x, så blifver AF~p-x.

Emedan nu . AH.= EL; så måste x.(p-x) = a2,

cl. v. s.....x2-px4a2=0;

och rötterna till denna qvadratiska eqvation blif va, den ena

den andra. . FA = |-+ \/(f)2 - ^

Den irrationella qvantiteten V/(-pV-a2 är tydligen en sida uti en rätvinklig triangel, hvars hy-pothenusa är - och tredje sida a. Denna trian-

gel är ADC, hvars hypothenusa är halfva den gifna räta lineen, och hvars andra sida är AD = ^a; om man derföre subtraherar CD = CF =

±a.a2 frå.n halfva AB, så erhålles FB; och

om man adderar CF till halfva AB , så erhålles AF.

Skulle a2 > \T") 5 så blifva den qvadratiska eqvationens båda rötter imaginaira. JVågon större rectangel, som brister med en qvad rät , än qvadraten på halfva den gifna lineen, d. v. s. än

C-^-") ' kan således -ej appliceras ":U r!rnna gifna lineen. (27 prop. ö-)

29 prop. Om man uti denna proposition antager samma signatur, som i den nästföregående, så erhålles eqvationen.

x2 + px-a2 = 0,

hvars rötter x = ± \X(-J)*+ a* * f

icke kuuna blifva imaginaira, ehuru stort värde

på a man än må antaga.

28 och 29 prop: innehålla således solution af de båda qvadratiska eqvationerna

30 prop. Detta problem åter gifver eqvationen

a. (a - x) = x2 eller .... x2 + ax-a2 = 0.

hvars ena rot x = + \/ a* 4 (-) - - construeras uti ll:te prop. 2, genom den rätvinkliga triangeln ADB, uti hvilken AB==a,.AD = ~, och således

33 Propos.

l Coroll. Om man kallar vinkeln vid medelpunkten =-v, fyra räta vinklar =: R, bågen = b, och hela peripherien - P; så är

v:R~b:P; så att, om man antager R såsom enhet for vink-

lars mått, och P såsom enhet för bågars mått, så blifver

Häraf är tydligt, att samma numertal måste uttrycka vinkelns storlek, som bågens storlek, hvarigenom man således är berättigad, att nyttja bågar såsom mått på vinklar.

För detta ändamål har man indelat hela peripherien uti mindre enheter, nämligen 360 lika delar, och kallat hvarje sådan del en grad, hvarje grad i 60 minuter, hvarje minut i 60

secunder o. s. v.

Definition. En grad är således en cirkelbåge, som utgör 1/360 af hela sin peripheri.

För att beteckna en vinkel, som är 47 grader, 34 minuter och 28 secunder skrifver man

47° 34' 28".

2 Coroll. Emedan bågen DE utgör lika många delar af sin peripheri som bågen BC af sin, hvilken radie man än må antaga, endast vinkeln A icke förändras; så är det alldeles likgiltigt, huru stor radien antages, då man vill uttrycka en vinkels storlek.

Planimetri.

Planimetri är läran om mätning och beräkning af lineer och vinklar samt plana ytors area. 204

29 prop. Om man uti denna proposition antager samma signatur, som i den nästföregående, så erhålles eqvationen.

x2 + px-a2 = 0,

hvars rötter x = ± \X(-J)*+ a* * f

icke kuuna blifva imaginaira, ehuru stort värde

på a man än må antaga.

28 och 29 prop: innehålla således solution af de båda qvadratiska eqvationerna

30 prop. Detta problem åter gifver eqvationen

a. (a - x) = x2 eller .... x2 + ax-a2 = 0.

hvars ena rot x = + \/ a* 4 (-) - - construeras uti ll:te prop. 2, genom den rätvinkliga triangeln ADB, uti hvilken AB==a,.AD = ~, och således

33 Propos.

l Coroll. Om man kallar vinkeln vid medelpunkten =-v, fyra räta vinklar =: R, bågen = b, och hela peripherien - P; så är

v:R~b:P; så att, om man antager R såsom enhet for vink-

lars mått, och P såsom enhet för bågars mått, så blifver

Häraf är tydligt, att samma numertal måste uttrycka vinkelns storlek, som bågens storlek, hvarigenom man således är berättigad, att nyttja bågar såsom mått på vinklar.

För detta ändamål har man indelat hela peripherien uti mindre enheter, nämligen 360 lika delar, och kallat hvarje sådan del en grad, hvarje grad i 60 minuter, hvarje minut i 60

secunder o. s. v.

Definition. En grad är således en cirkelbåge, som utgör 1/360 af hela sin peripheri.

För att beteckna en vinkel, som är 47 grader, 34 minuter och 28 secunder skrifver man

47° 34' 28".

2 Coroll. Emedan bågen DE utgör lika många delar af sin peripheri som bågen BC af sin, hvilken radie man än må antaga, endast vinkeln A icke förändras; så är det alldeles likgiltigt, huru stor radien antages, då man vill uttrycka en vinkels storlek.

Planimetri.

Planimetri är läran om mätning och beräkning af lineer och vinklar samt plana ytors area.

Svenska Längdemått äro: l:o Verkmått.

Famn. Alnar. Fot. Tum. Lineer.

l =3 = 6 = 72 = 576

l = 3 = 24 = 192

l = 12 - 96

1=8

2:o Decimalmått,

Stång. Fot. Tum. Lineer. Gran. Scrupel.

l = 10 = 100 = 1000 = 10000 = 100000

l = 10 = .100 = 1000= 10000

l = 10 = 100= 1000

l = 10= 100

1= 10

Fot är således en gemensam mångfaldig för verkmått och längdemått, så att

Fot Verktum Decimaltum l = 12 =10 ;

eller......,6 Verktum = 5 Decimaltum.

Således multiplicerar man med f, för att reducera från Decimaltum till verktum; och med bråket 5/6, för att reducera frän verktum till decimaltum.

T. ex. 10 Verktum = 5.10/6 = 8,333.. Decimaltum.

7,14 Decimaltum = 6 . 7,14 / 5 = 8 Tum 4,5 lineer Verkmått.

Fördelen af decimalmåttens begagnande är, att man endast behöfver flytta decimal-coma förbi en sifra åt höger för alt reducera från högre till närmast lägre sort; och förbi en sif-

ra åt venster för att reducera från lägre till

närmast högre sort: således är

Stång Fot Tum . Lineer Gran 3,798 = 37,98 = 379,8 = 3798 = 37980.

Den sammansatta, Transversala decimal-scalan, hvarå de mindre måtten tagas, är af följande construction:

A t

B 9 8 7 6 5 4 3 2 1 C

På en skifva BE af metall, eller elphenben, i rectangulär form, är längden af en decimaltum utstucken från B till C, från C till l, o. s. v.; så att hela scalan är 5 tum. Bredden AB tages vid pass en tum.

Hvardera af lineerna AB, BC indelas nu uti 10 lika stora delar, hvarefter man drager räta lineerna 9a, 8b, 7c etc., parallela med AE, och A9, t8, u7, etc. parallela med A9.

Emedan nu BC är en tum, så äro delarne på BC tiondedels tum, eller lineer.

Uti de likformiga trianglarna AB9 och A9k måste

A9 AB - 9k B9;208

men A9 är en tiondedel af AB, derföre är äfven Ok en tiondedel af B9; och då B9 är en linea; så måste 9k vara en tiondedel af en linea, eller ett gran.

På samma sätt bevises, att 8 l är 2 gran, att 7m är 3 gran, o. s. v.

Tager man nu på scalan ett mått t. ex. från punkten f till p; så är det förut bevist, att p4 är 6 gran och då hela f4 är 2 tum, så måste fp vara 2-0,06 tum, d. v. s.

1,94 tum, eller l tum 9 lineer 4 gran.

På samma sätt är ifrån c till den punkt,

hvarest cm och x5 skära hvarandra, 1,57 tum;

så att sifrorna under BC betyda lineer, och de utefter BA betyda gran.

Vid måttets tagande iakttages, att båda passarfötterna äro på en och samma med AE parallela linea.

Ytmåtten äro qvadraterna på längdemåtten Enligt 3 Cor. 20 pr. 6 måste således, om numertalet n utmärker, huru många enheter af den lägre sorten längdemått innehållas i den större, numertalet n2 utmärka, huru många enheter af den lägre sorten ytmått innehållas i den större, Derföre måste af verkmåtten

qvadratfamn qv.al:r qv.fot qv.tum l =9 = 36 = 5184

l = 4 = 576 l = 144

och af decimalmåtten

qv.stång qv.fot qv.tum

= 100 l

= 10000 = 100

l

qv.lineer

1000000

10000

100.

För att således reducera qvadratiska Decimalmåtten från lägre sort till närmast högre, flyttar man decimal-coma förbi 2 sifror åt venster; men förbi 2 sifror åt höger, för att reducera frän högre sort till närmast lägre, t. ex.

qv.stång qv.fot qv.tum qv.lineer.

7,90538 = 790,538 = 79053,8 = 7905380

Problem f .

Att finna arean A af en gifven parallelogram.

Mät höjden och basen uti parallelogrammer, och multiplicera de numertal med hvarandra, som, i samma sort längdemått, uttrycka dessa lineers storlek; producten angifver parallelogrammens area uti ytmått af samma benämning, som de använda längdemåtten. Detta uttrycker man i korthet sålunda:

Arean of en parallelogram är lika stor med producten af hans höjd och bas.

Bevis. Låt A, H, B beteckna arean, höjden och basen af en gifven parallelogram, och q, h, b arean, höjden och basen af en annan parallelogram; gå måste, enligt Scholium till l prop. 6 A:q = H,B:h.b210

År nu parallelogrammen q t. ex. qvadraten på en tum, d. v. s. l qvadrattum; så är h -h - I tum; och alltså måste

A:1 = H.B:1; hvaraf följer^ att

A = H.B; h. s. b.

Om t. ex. en parallelogram är 19 tum hög CH h hans bas är 3,7 fot; så är hans area HB = 1,9.3,7 = 7,03 qvadr.fot = 703 qv.tum,

Problem $.

Att finna arean af en gifven triangel.

Arean af en triangel är lika stor med halfva producten af hans höjd och bas, (41 prop. 1.) så att, om A betyder triangelns area, H dess höjd, och B dess bas, så är

A = -

T. ex. Om triangelns höjd är 15,2 tum, och hans bas 0,12 fot; så är hans area

A r= -UL*ii!« = 15,2.0,6 == 9,12 qv.tum.

Problem 3*

Att finna arean af ett Trapezium AC, bom har tvänne parallela sidor AB, DC.

Låt diagonalen BD vara dragen, och BE vara vinkelrät mot DC, och således äfven mot AB: sii ar BE gemensam höjd för trianglarna

--b DBC. "

Triang. ABD = ^-

Triang. DBC =

mäter derföre litieeöm AB = a, D6 = b, BE = h; hvarefter, enligt probl, 2,

ai,

j

b.h

T'

a-t-b

och således Trapez. AC =----.h.

2

Alltså är arean af ett Trapezium, som har tvänne parallela sidor., lika stor med producten af de parallela sidornas halfva summa och deras vinkelräta afstånd.

T. ex. Om a = 6,7 tum, b = 13,1 tom, och h -5,5 tum; så är arean af Trapezium ' a+b , . 6,7+13,1 - K -.. -., ,

A = ~-. h = ---- ,5,5 = 54,45 qvadrattum.

Problem 1.

Att Jinna 'arean af en regulier månghörning ABCDE.

Man construerar månghörningens Apothém, FH, cl. v. s., radien till den uti månghörningen inskrifna cirkeln, som således ar vinkelrät emot BC; 18 pr* 3. Sedan mäter man de båda räta lineerna BC och FH, hvarigenom man får triangeln BFC lika stor med

BC.FH.

Har nu månghörningen n sidor, så innehåller han n sådana lika stora trianglar; hvarföre lians area måste blifva

. ___ n.BC.FH^

2

Nu är n.BC den reguliera månghorningens omkrets:

Alltså ar arean af en regulier månghörning lika stor med producten af halfva omkretsen och apothemen.

T. ex. Om, uti femhorningen, BC = 3,7 tum, och FH = 2,7tum; så är hans area

5.8,7.2,7 _ 24,975 qvadrattum

2

Om månghorningens halfva sida betecknas

med s, så är den liksidiga Triangelns area 1,732. s2;

Qvadratens. 4. s2;

den reguliera 5hörningens ; . 6,882. s2; den reguliera 6hörningens . .10,392. s2; den reguU Shorningens 19,314. s2;

den regul. lOhörningens . . . 30,776. s2; så att, om en regul. 6hornings sida är 8 tum, så är hans area

10,392.16 = 166,272 qvadrattum.

Problem 5.

Att finna arean af en gifven rätlinigjigur.

Man indelar den gifna rätliniga figuren i trianglar eller trapezier, och beräknar, enl. Probl. 2 och 3, hvar och en af dem. Deras summa är månghorningens area.

Låt den gifna figuren vara ABCDEFGHKL; drag en diagonal AF, och genom figurens horn B, L, K .... räta lineer, Bb, LI, Kk . . . vinkelräta mot AF.

Genom mätning af dessa vinkelräta lineer, och af afståiMena Al, Ab, lk, be ... finner man figurens area, enligt följande räkning:

Låt Ll = 0^27 tum; Al = 0,17; Kk = 0,29; lk = 0,62; Hh = 0,84; Kh = 0,4; Gg = 0,14; hg = 0,78; Fg = 0,13; Bb = 0,63; Ab = 0,4; Cc=^0,76; be = 0,53; Dd = 0,46; cd = 0,3; Ee = 0,55; de = 0,32; Fe = 0,2, allt decimaltum; så måste, enl. Prob. 2 och 3:

Triang. AL1 = ^ = ^^=.....- 0,02295

Trap. Kl = ^±5S-Ik = !£!£« 0,1736

Trap. Hk = 5*±2* kh = 1,13. ?£ = ';. 0,226

Trap. Hg - Triang. FGg e 5^±^. hg

.Fg.Gg _ 0,98.0,78 0,13.0,14 _ Q ^gj

2 " 2 " 2 " '214

f_ . . ni Bb.Ab 0,63.0,4 n

Triang. ABb = -- = -- c ..... O,

n Bb+Cc « 1,39.0,53 Trap. Be = ---. be = ---- =.....

r-, ^T Cc-HDd -, 1,22.0,3 ^ -100

Trap. Cd = ---. cd s .. =.....- 0,183

& £

Trap. De-Triang. FEe =5^?. de

_ Fe'Ee - 1^01^32 ^ 0,2.0,55 _ ^ | Qgg 21"" "" «2 i - ...» 4 5 __

ochsåledeshelafigureriABCDEFGHKL = qv.tum,.

Föreställer nu denna figur ett fält på marken, lagdt i"charta efter åkerscala (se probl. 15); så måste denna area multipliceras med 16000000, för att finna fältets area, som då blifver 25321600 qv.tum=253216 qv.fot = a||géé = 4,4 Tunneland, e-medan l T:land = 14000 qv.alnar s 56000 qv.fot.

Problem G.

Då radien till en cirkel är gifven, att finna sidan af den uti cirkeln inskrifna liksidiga triangeln.

Öm ABC är den in-skrifne liksidige triangeln, och BD cirkelns diameter; så är räta lineen AD den inskrifna liksidiga sexhörnin-gens sida; och DAB en rät vinkel (31 pr. 3.). Kallarman

D

B

x; s är

= r och BD

då cirkelns radier, och AB

samt

r . 47 pr. l, T ex. Om r r: 1; så är AB = V 3 = 1,732

i

i

Den omskrifna triangelns sida är dubbelt si stor, som den inskrifnas; hvadan den omskrifne triangeln är 4 gånger så stor, som den inskrif-ne; 19 pr. 6.

Den inskrifna triangelns area är -

Problem *.

Då radien är gifven, att Jinna den inskrifna qvadratens sida.

Enligt constructionen uti 6 prop. 4, måste

AB* = AE f BE*;

d. v. s. ..... X2=:2r2, eller xnV^.r.

Dien omskrifna qvadratens sida ärt=2r; den inskrifna qvadratens area är 2.r*; den omskrif-nes 4r2.

Problem §,

Dä radien är gifven, att finna den inskrifna tiohörnirtgens sida.

Uti 10 prop. 4, äro vinklarne ABD och ADB, hvardera dubbelt så stora som A, så att ABD = 2A, ADB:=2.A, samt A 4 ABD-f ADB - 5. A,

men alla tre vinklarne uti triangeln äro tillhopa 180°, således 5A = 180°; så att vinkeln A = 36°, och upptager alltså en tiondedei af peripherien; hvadan BD (= AC) n tiohorningens sida; men nu

är, enligt constructionen, AB.BC = ÄC* det vill

= x; sa

säga: om man kallar AB = r, BD

blifver

r.(r-x)=x2,

hvaraf.......x = ± -T-«r.

a

Problem 9.

Att finna vinkeln uti en gifven regulier månghörning. Se fig till 20 pr. 6.

Om man indelar månghörningen uti trianglar genom diagonaler från ett hörn; så uppkomma 2 trianglar färre, än vinklarnes antal. Kallar man då vinklarnes antal n; så blir trianglarnes antal n-2, samt dessa trianglars vinklar tillhopa, d. v. s. månghörningens vinklar tillhopa, (n-2). 180°; emedan de uti hvarje triangel utgöra 180°, 32 pr. 1. Dividerar man nu denna summa med n, eller med vinklarnes antal; så erhålles gradtalet af en bland månghörningens vinklar, näml.

v =

Sålunda är den liksidiga triangelns vinkel

= ^.180°=: 60°

ö

Qvadratens. . . =.180° ^90° Femhorningens = ^.180° = 180°

5

O. 8. V.

Sjette Boken.

Om Ciri&elii.

Lemma 1.

Cirklar B radier förhålla sig till hvarandra, som omkretsarne af de uti cirklarna inskrifna likformiga reguliera månghörningar.

B b

Låt omkretsen af Shörningen ABC etc. vara P, och omkretsen af Shörningen abc etc. vara p; samt M och m vara medelpunkterna för de o inskrifna cirklarna; så skall det bevisas, att AM:am = P:p.

Bevis. Emedan månghörningarne äro reguliera och likformige, så äro trianglarne AMB och amb likformige, äfvensom alla öfriga trianglarne på AH, HG etc., åh, hg etc., som hafva deras spetsar uti M och m. Derföre måste AM:am = ABrab = BC:bc = CD:cd etc. hvadan AM:am = AB + BC 4 CD + etc.: ab + be +

cd 4 etc., . . 12 pr. 5. d. y. s. AM:am = P:p, h. s. b.

15* 216

Sjette Boken.

= x; sa

säga: om man kallar AB = r, BD

blifver

r.(r-x)=x2,

hvaraf.......x = ± -T-«r.

a

Problem 9.

Att finna vinkeln uti en gifven regulier månghörning. Se fig till 20 pr. 6.

Om man indelar månghörningen uti trianglar genom diagonaler från ett hörn; så uppkomma 2 trianglar färre, än vinklarnes antal. Kallar man då vinklarnes antal n; så blir trianglarnes antal n-2, samt dessa trianglars vinklar tillhopa, d. v. s. månghörningens vinklar tillhopa, (n-2). 180°; emedan de uti hvarje triangel utgöra 180°, 32 pr. 1. Dividerar man nu denna summa med n, eller med vinklarnes antal; så erhålles gradtalet af en bland månghörningens vinklar, näml.

v =

Sålunda är den liksidiga triangelns vinkel

= ^.180°=: 60°

ö

Qvadratens. . . =.180° ^90° Femhorningens = ^.180° = 180°

5

O. 8. V.

Sjette Boken.

Om Ciri&elii.

Lemma 1.

Cirklar B radier förhålla sig till hvarandra, som omkretsarne af de uti cirklarna inskrifna likformiga reguliera månghörningar.

B b

Låt omkretsen af Shörningen ABC etc. vara P, och omkretsen af Shörningen abc etc. vara p; samt M och m vara medelpunkterna för de o inskrifna cirklarna; så skall det bevisas, att AM:am = P:p.

Bevis. Emedan månghörningarne äro reguliera och likformige, så äro trianglarne AMB och amb likformige, äfvensom alla öfriga trianglarne på AH, HG etc., åh, hg etc., som hafva deras spetsar uti M och m. Derföre måste AM:am = ABrab = BC:bc = CD:cd etc. hvadan AM:am = AB + BC 4 CD + etc.: ab + be +

cd 4 etc., . . 12 pr. 5. d. y. s. AM:am = P:p, h. s. b.

 Lemma 2.

Cirklars peripherier förhålla sig till hvarandra, som deras radier.

Låt C c beteckna tvänne cirklars peripherier, och R, r deras radier; så skall det bevisas, att

C:c:=R:r.

Bevis. Ty om man antager, att reguliera likformiga månghörningar äro inskrifne uti cirk-klarna, så äro deras omkretsar mindre, än cirk-lames; och om man derföre kallar den ena månghörningens omkrets C-A, och den andras c-a; så är uti Lemma l bevisadt, att

C-A:c-a = R:r.

Den inskrifna månghörningens omkrets närmar sig desto mera till likhet med cirkelns peripheri, ju flera sidor månghörningen har; sä att storheterna A och a, eller skillnaderna imellan .månghörningarnes och cirklarnes omkretsar, äro mindre for 16hörningen, än för Shörningen, ännu mindre for 32hörningen; o. s. v.

Deremot måste förhållandet

C-A:c-a

förblifva alldeles oförändradt, ehvad antal sidor månghörningarne än må hafva; emedan detta förhållande alltid

förblifver lika med förhållandet

R:r.

Men att förhållandet C-A:c-a skall förblifva oför-ändradt, under det att storheterna A och a på oändligt många sätt förändras, är uppenbarligen omöjligt, utan att dessa storheter utgöra lika sto

ra delar, hvar och en af sin peripheri; så att t. ex.

hvilket gifver

A c - . C och a c - . c ;

m m .

d. v. s. eller . .

C:c = R:r, h. s. b. ... 15 pr. 6

Lemma 3.

Arean af en cirkel är lika stor med producten af dess peripheri och halfva radie.

Låt cirkelns area vara a, dess peripheri p, och radie r, så skall det bevisas, att

p.r

a=V

Bevis. Antagom, att en regulier månghörning är omskrifven omkring cirkeln, hvars radie således blifver månghörningens apothém; och att denna månghörnirigs omkrets, som måste vara större än cirkelns peripheri, är p 4- m; samt att månghörningens area, som äfven måste vara större än cirkelns area, är a + n; så är, enl. ProbL 5,

och således:

a =: p-r+ ^i 22

-n

Men nu kan cirkelns area, a, alldeles icke vara beroende af den omskrifna månghörningens area eller omkrets, d. ve g. af storheterna T och

n; emedan en och samma cirkel då skulle blifva olika stor, allteftersom man omskrefve honom med en Sliörning eller med en löhörning. Således

kunna storheterna ^ och n uti värdet af a omöj-

A

ligen finnas, annorlunda än så, att ~-n:r O, hvilket gifver a = ^, h, s. b.

Lemma 4.

Cirklar förhålla sig till hvarandra, som qvadraterna pä deras radier.

Låt A, P, R beteckna arean, peripherien och radien af en gifven cirkel; a, p, r beteckna arean, peripherien och radien af en annan gifven cirkel; det skall bevisas, att

Bevis. Ty, enligt Lemma 3, är A = -^, och a - ^;

L &

och således A:a =: P.R:p.r; d. v. s. att areorna hafva till hvarandra ett förhållande, som är sammansatt af peripheriernas och af radiernas förhållande. Men nu är, enl. Lemma 2,

P:p = R:r,

Hvadan det af dessa båda sammansatta förhållande är dupliceradt af ettdera bland dem, enl. for-klar. Öfver 10 def. 5. Alltså är A:a = Ra;r% h. s. b.

Lemma 5,

Om man känner areorna af tvänne likformiga reguliera månghörningar ? of hvilka

den ene är inskrifven uti, den andre är om-skrifven omkring en gifven cirkel; att Jinna areorna af den inskrifna och omskrifna månghörningen, som har dubbelt så många sidor. E P M N F

Låt AB vara den inskrifna, och EF, parallel med AB, den omskrifna likformiga månghör-ningens sida, och C cirkelns medelpunkt. Drager man cordan AM och tangenterna AP, BN; så blifver AM sidan till den inskrifna och PN sidan till den omskrifna månghörningen med dubbelt antal sidor; ty vinkeln ECF = 2PCN.

Vi anmärke, att trianglarne ACD, ECM, ACM och fyrddiga figuren CAPM, förhålla sig till hvarandra, som de månghörningar, till hvilka de höra. Låt a beteckna den månghörning, hvars sida är AB; b den, hvars sida är EF; * den, hvars sida är AM, och y den fyrsidiga figuren CAPM. a och b äro gifna: x och y sökas.

Triang. ACD:ACM = CD:CM; l prop. 6; d. v. s. a:x~ CD:CM; och triang. ACM:CEM = CA:CE, d. v. s. x:b = CA:CE; men emedan EF är parallel med AB5 måste

CD:CM~CACE, 2jnop 6

hvaraf a;x = x;b, eller x =222

Yidare, emedan triang. CPM:CPE = PM:PE; och vink. ACP = PCM (12 prop. 4.); så måste PM:PE -CM:CE(3 prop. 6.)=CD:CA = CD:CM = a:x; samt således CPM:CPE = a:x; eller CPE: CPM zz x:a; och CPE + CPM.-CPM = a+x:a, eller

b:CPM = a + x:a och 2b:CAPM = a + x:a

d. v. s. 2b:y = a + x:a, hvadan y = -^-*

ä "T~X

T. ex. Om vi antage cirkelns radie = l ; så blifver den i honom inskrifne qvadraten a = 2, och den honom omskrifne qvadraten b =4, (probl. 7.); och således den inskrifne Shörningen

x = 1/8 = 2,8284271, samt den omskrifne Shörningen 2ab 2.2.4

Antager man nu, att a = 2,8284271, b = 3,3187085; så blifver den inskrifne sextonhör-

ningen

x = 1/2,8284271.3,3137085 = 3,0614674, och den omskrifne 16hörningen

2.2,8284271.3,3137085 0 loo^n^n i,

^7^284271^3,0614674 =3,1825979; och om inan på detta sättet fortfar, erhåller man följande värden af de inskrifna och omskrifna mång-honungarna (Legendre):

Sidornas Area af

antal uti

månghör-

ningen. Den Inskrifna. Den Omskrifna.

4 2,0000000 4,0000000

8 2,8284271 3,3137085

16 3,0614674 3,1825979

32 3,1214451 3,1517249

64 3,1365485 3,1441184

128 3,1403311 3,1422236

256 3,1412772 3,1417504

512 3,1415138 3,1416321

1024 3,1415729 3,1416025

2048 3,1415877 3,1415951

4096 3,1415914 3,1415933

8192 3,1415923 3,1415928

16384 3,1415925 3,1415927

32768 3,1415926 3,1415926

Problem !<>.

Att finna Arean och peripherien uti en cirkel, hvars radie är gifven.

Uti nästförestående lemma hafve vi funnit, att då cirkelns radie är =1, är deri inskrifne 32768hörning ~ 3,1415926^ den omskrifne 32768 hörningen; och att således sjelfva cirkeln, som är större än den förra, men mindre än den sednare, till sin area är, med fullkomlig rigtighet224

Sjette Boken.

uttryckt genom detta numertal, så vida man ej fordrar större noggrannhet än den, som 7 decimaler gifva. Alltså är arean af en cirkel, hvars radie är l, lika stor med

3,1415926; men nu är enl. Lemma 4:

A:a = R2:r2

d. v. s. . . A:3,1415926r:R2:l, eller A = 3,1415926.R2.

Vidare är enligt Lemma 3: A = £»,

2

d. v. s. 2.3,1415926.R2 = P.R, eller P = 2.3,1415926.R.

Detta numertal 3,1415926, hvilket således uttrycker förhållandet imellan radien oeh peripherien uti cirkeln, betecknas uti mathematiska skrifter med bokstafven n\ och under denna beteckning-, hafve vi således följande tvänne formler:

För Peripherien, P = 2.7i.R,

" Arean> . . . AnTiR2; af hvilka man vidare härleder följande:

.

Exempel.

Om en cirkels radie är 7,3 tum, så är hans peripheri P = 2 3,14159.T,3 = 45,8672 tum; och

hans area A = 3,14159,7^3^ 167,415 q\,tum=

Om en cirkels peripheri är 5,1 tum; så är hans radie R = 1=. = 0,81 ... tum, och

= 2,06 qv.tum.

pä

hans area är A = - = r

4n 4,

Om en cirkels area är 537 qvadratalnar; så är hans radie R =\/~ = \/~7^ = 13,07 aln. och

w n w 3,14159

hans peripheri P c Z.jAiA = 82,14 alnar.

Profelem fi*

Att finna längden af en cirkelbåge, då hans gradtal och radie äro gifna.

Bågen är till hela peripherien, som hans gradtal till 360°, (l Coroll. till 33 prop. 6.) ; så att, om bågen är b, gradtalet g, och radien r; så är hela peripherien 2/ir, samt = b:2/ir; hvaraf följer, att

18 T. ex. Om bågen är 24°15', och radien 20

o .. * o ,.. 11 rcrg 3,14.20.97 0 " .

tum ; sa ar bagens längd b = - = 4180~ = 8,4 tum.

Eqvationen b = ^ gifver, för beräkningen af

gradtalet, då bågens längd och radie äro gifna

ISO.b

g - - >

0 nr

och för beräkningen af radien, då gradtalet och bågens längd äro gifna,

r -

180.bt226

 Theorem.

Om tvänne cirkelbågar äro lika stora, men tillhöra olika stora cirklar; så förhålla sig deras gradtal omvändt som radierna.

Bevis. Låt båda bågarnes längd vara b, och den enas gradtal vara g, och hans radie r, samt den andras gradtal vara G, och hans radie R; så måste, enl. nästföregående problem, 180,b , ~ I80.b. ,

2'c:----- och ur a-----' d. v. s.,

0 tt.r nR y

g:G-i;g-, eller g:G = R:r, h. s. b.

Problem f £.

Att Jinna arean af en cirkelsector, då radien och sectorns båge äro gifna.

Sectorn förhåller sig till cirkeln, som hans båge till hela peripherien, (4 Coroll. 33 pr. 6.); så att, om sectorn är A, bågen b, och radien r; så är hela peripherien 2/ir, och hela cirkeln /ir2,

samt

:^r2 =: b:2/zr, d. v. s.

Ar sectorns båge gifven till gradtal; så är

hans längd b = ^~, och således arean

loU

360

T. ex. Om radien är 10 tum och bågen ut gör 15°; så är sectorns area

. 3,1416.100.15 1Qnn j .

~ 360 -- ;= 13,09 qvadr.tum.

För beräkning af bågen, då sectorns area och radien äro gifna, är

och för beräkning af radien, då bågen och arean äro gifna,

2A.

r = -

Problem 13.

Att finna arean af ett cirkelsegment (se fig. till 15 prop. 3.)

Låt segmentet vara MFGN; man beräknar först sectorn MFGNE, enl. probl. 12, och sedan triangeln MEN, enl. probl. 2; samt subtraherar triangelns area från sectorns; då resten måste vara segmentets area.

Är segmentet MBCN, så adderar man triangeln MEN till sectorn MBNE.

För att uti dessa båda sista problem mäta längden af sectorns eller segmentets båge, tager man uti passaren en så liten rät linea, att hon sammanfaller med den gifna cirkelperipherien, och undersöker, huru många gånger denna räta linea innehålles uti sectorns båge. T. ex. uti passaren tager man 0,05 tum, och finner, att denna linea innehålles 19 gånger uti bågen MGN, samt att derutöfver återstår en mindre del, näml. 0,03 tum; då är bågen

±119.0,05+0,031=0,98 tum.

Genom Irigonometrisk räkning utröner man bågens gradtal, om man mäter räta lineen ML, hvarefter

T = Sin iMGN.

ME

Sedan derigenom gradtalet af bågen är beräknadt, finner man enl. probl. 12 och 13 sec-toras och segmentets area.

Problem 14.

Alt Jtnna arean af en cirJtelring (se fig. till Coroll. 33 prop. 6).

Man beräknar först arean af den större cirkeln, hvars radie antages vara R, och sedan arean af den mindre cirkeln, hvars radie antages vara r, samt subtraherar deri sednare från den förra; då resten måste vara ringens area.

Enligt Probl. 10 är nämligen den större cirkelns area TiR2, och den mindre cirkelns area Tir2; "samt således ringens area

A r n (R2-r2) = 7r.(R4r).(R-r).

För beräkningen af större radien är

och för beräkning af den mindre radien

Problem 15.

Att öfver en gifven trakt upprätta en Charta^ är att på en gifven rät linea upprita en

figur, som är likformig och lika ställd med en gifven figur på marken; och då man förutsätter, att den gifna figuren på marken är en plan , rät-linig figur, återfinnes detta problem uti 18 prop, 6, samt solveras på följande sätt:

l:o Man utstakar och mäter på marken en rät linea ab, från hvars båda ändar, a och b, man kan se de föremål, C, D, E, F, som skola på chartan utsättas. Derefter bestämmer man det förhållande, som skall ega rum imellan den på marken uppmätta lineen och den med henne ho-mologa lineen på chartan, och beräknar samt afsätter denna sednares längd, gb.

Dessa båda således gifna räta homologa lineer, ab, gb, kallas mätningens Baser.

Basernas inbördes förhållande, som bestämmer chartans och markens inbördes storlek, kallas Scala.

De uti landtmäteriet antagna scalorna äro:

Tomt scala, enligt hvilken gb

af naturliga storleken;

2000

eller

Aker-scala , enligt hvilken gb =

5 eller

- - af naturliga storleken; Skogs scala, enligt hvilken gb = "Q^^^^J eller

- - . af naturliga storleken*

ö 000

Således gifva, efter

Tomt-scala, 100 aln:r på marken l deci.tum på chartan ;230

Åker-scala, 200 aln.på markenldec.tumpåchartan; Skogs-scala,400 " " l " "

och ett fält på marken är, efter tomt scala 4000000, efter åker scala 16000000, samt efter skogs-scala 64000000 gånger så stort, som det likformiga fältet på chartan (20 pr. 6.).

Vid större skogssträckors chartläggning tager marigb~iGÖÖÖ' eller 2ÖÖÖO af naturli£a storleken.

Sedan basen är afmätt, kan man, vid chartläggning, för eget behof, af ett mindre fält, efter ögonmått bedömmä

storleken af den längsta linea, som på chartan kan ifrågakomma, och derefter rätta valet af scala. Om t. ex. den längsta lineen vore ungefär 3600 fot och landtmäta-re-brädets sida l fot; så kan man beqvämligen använda åker-scalan, som gifver något mindre än

- - af naturliga storleken; men om längsta räta

lineen på marken vore blott 2800 fot; så kan

"man taga scalan till - - af den naturliga storle-

ken. Vore då den afmätta basen t. ex. 1920 fot;

så blefve basen på chartan l~ fot = 6>4 tum-

2:o Landtmätare-tajlan uppställes nu så, att punkten g på chartan kommer midtofver punkten a på marken, hvarefter diopterlinealen, förmedelst tvänne uti taflans punkter g och b, vinkelrätt mot taflan nedstuckna, fina nålar, passas utefter gb. Sedan vrider man taflan så , att lineen gb genom dioptrarna visar på en i punkten b på marken utsatt signal; och svänger sedan

linealen omkring nålen uti g samt drager diagona- ler från g åt alla punkterna C, D, E, F; hvilka dia-gonaler på chartan blifva ge, gd, ge, gf. Slutli-gen flyttar man taflan så, att punkten b på chartan kommer öfver punkten b på marken, och bg utefter ba, samt drager från b på chartan diagonalerna be, bd, be, bf.

Afskärningarne c. d, e^ f på chartan svara då mot punkterna C, D, E, F på marken, och figuren gbcdef är likformig med abCDEF, emedan han i sjelfva verket är construerad såsom 18 prop. uti 6:te boken förskrifver.

3:o Vill man vidare på chartan utmärka punkter på marken, som ej synas både från a och b; så kan man uppmäta eri ny bas, eller, såsom vanligen sker, till bas begagna någon af de på chartan redan gifna räta lineerna be, bd, cd . . . . , och dermed förfara, såsom med gb.

4:o I stället för att bestämma punkterna c, cl, e, f genom cliagonalernas afskärningar, kan man., sedan diagonalerna från g äro dragna, mäta afstånden aC, aD, aE, aF och efter scalan afsätta deras mått på chartan från g; eller kan man, utan att bruka diopter-lineal och tafla mäta t. ex. båda

Sjette Boken.

diagonalerna aC, bC, och reducera deras mått efter scalan, samt construera triangeln gcb, hvarigenom punkten c blifver bestämd.

Basen ab bör med yttersta noggrannhet mätas och afsättas, samt tagas, så vidt möjligt är, utefter en horizontal linea. Han bör vara så stor, att vinklarne, som bestämma punkterna c, d, e, f ej blifva mycket spetsiga eller trubbiga. Vinklar, som äro mindre än 30°, eller större än 150°, gifva osäkra afskärningar.

Taflan bor ställas horizontalt efter vattenpass. Detta sker derigenom, att taflan riktas så länge, till dess vattenpasset, lagdt på taflan i tvänne mot hvarandra ungefär vinkelräta riktningar, utvisar horizontalt läge.

Markens ojämnheter, hvarigenom hennes yta är något större än chartan utvisar> tagas ej i beräkning.

Denna chartläggning kallas Geometrisk^ till skillnad från deri Geographiska:, som upptager större trakter af jordens yta, såsom landskap och stater. På hvarje charta utsattes nordstrecket förmedelst compassen.

Slutligen meddele vi uti följande tabell de (formler, förmedelst hvilka de uti plana Geometrien oftast

förekommande beräkningar verkställas. Bokstäfverna uti denna tabell utmärka samma storheter, som uti de nästföregående problemen 1-12.

Figur. Gifna. Sökes. Formel.

Parallelogram . . B, H A A -= HB

Triangel ..... B, H A . H.B

~ 2

Trapezium .... a, b, h A A _a"fb Jj

^ 2

Regul. mång- a, s, n A A = n.a.s.

hörning . . . n v v =-.180°

n

R P P = 2;rR

A P PrZj/TiA

P R p

Cirkel ...... ;

^27r_

A R a = V/-

R A A = TiTV2

P A P2

R,r A Aen(R?r)(R-r)

A r R \ /A j.r2

Cirkel ring . . .

R- V"^

A, R r V/R2*-

TT

R* S b Q - --------

Båffe .... Rb

I80b

, w

O* .". -

b, g R ilo.b

' O

r% ±r

f b.R A Äg * bR

Sector ...... ^ j

A:=^

g?R A u

*.

"860"

Figur. Gifna. Sökes. Formel.

A,R b b= 2A/R A, g b b= \/"pi"gA/90 Sector..... A, b R R = 2A/b A, g R R = \/360.A/"pi"g

ELFTE BOKEN.

Definitioer.

1. Solid figur kallas den, som har längd, bredd och höjd.

2. Det yttersta av en solid figur är yta.

3. En rät linea är vinkelrät mot ett plan, då hon gör räta vinklar mot alla räta lineer uti det planet, som råka henne.

Den vinkelräta lineens afskärningspunkt med planet kallas lineens fot uti planet.

Räta lineen AB är vinkelrät mot planet MN, om hon är vinkelrät mot BC, BD, BE, . . . huru heldst dessa räta lineer må vara dragna, endast de gå genom B,och äro uti planet MN.

4. Om en rät linea lutar emot ett plan, och man frän någon punkt på denna linea drager en rät linea vinkelrät mot planet, och sammanbinder de båda punkterna, uti hvilka båda lineerna träffa planet; så är den vinkeln, som den lutande lineen gör mot den sammanbindande lineen, den lutande lineens vinkel emot planet.

Om man från A drager AE vinkelrät mot planet CD, och sammanbinder punkterna B och E, hvarest båda lineerna träffa planet; så är ABE lineens AB vinkel mot planet.

Denna vinkels plan är vinkelrätt emot planet CD (15 prop. 11.).

5. Den vinkel, som tvänne plan göra mot hvarandra, är den vinkel, som omfattas af tvänne räta lineer, dragna från en och samma punkt på planens afskärningslinea, en i hvartdera planet, vinkelrätt mot afskärningslineen.

Om tvänne plan, CM; DN, skära hvarandra uti räta lineen CD, och man drager EB uti planet CM, och EA uti planet DN, båda vinkelrätt

234 Elfte Boken.

Figur. Gifna. Sökes. Formel.

A,R b b= 2A/R A, g b b= \/"pi"gA/90 Sector..... A, b R R = 2A/b A, g R R = \/360.A/"pi"g

ELFTE BOKEN.

Definitioer.

1. Solid figur kallas den, som har längd, bredd och höjd.

2. Det yttersta av en solid figur är yta.

3. En rät linea är vinkelrät mot ett plan, då hon gör räta vinklar mot alla räta lineer uti det planet, som råka henne.

Den vinkelräta lineens afskärningspunkt med planet kallas lineens fot uti planet.

Elfte Boken. 235

Räta lineen AB är vinkelrät mot planet MN, om hon är vinkelrät mot BC, BD, BE, . . . huru heldst dessa räta lineer må vara dragna, endast de gå genom B,och äro uti planet MN.

4. Om en rät linea lutar emot ett plan, och man frän någon punkt på denna linea drager en rät linea vinkelrät mot planet, och sammanbinder de båda punkterna, uti hvilka båda lineerna träffa planet; så är den vinkeln, som den lutande lineen gör mot den sammanbindande lineen, den lutande lineens vinkel emot planet.

Om man från A drager AE vinkelrät mot planet CD, och sammanbinder punkterna B och E, hvarest båda lineerna träffa planet; så är ABE lineens AB vinkel mot planet.

Denna vinkels plan är vinkelrätt emot planet CD (15 prop. 11.).

5. Den vinkel, som tvänne plan göra mot hvarandra, är den vinkel, som omfattas af tvänne räta lineer, dragna från en och samma punkt på planens afskärningslinea, en i hvartdera planet, vinkelrätt mot afskärningslineen.

Om tvänne plan, CM; DN, skära hvarandra uti räta lineen CD, och man drager EB uti planet CM, och EA uti planet DN, båda vinkelrätt

mot CD; så är vinkeln AEB den, vinkel, som planen CM och DN göra med hvarandra.

Denna vinkel kan vara rät, trubbig eller spetsig, Hans plan är vinkelrätt mot CD (4 prop. 11),

6. Plan sägas vara parallela, om ej råkas, huru långt de än må utdragas.

7. Solid vinkel är formen af den rymd, som omslutes af flera plan, hvilka sammanträffa uti en punkt.

Om planen BAC, CAD, BAD skära hvarandra uti räta lineerna AB, AC, AD; så är solida vinkeln A formen af den rymd, som dessa plan omsluta, och som är obegränsad åt B, C, D,

8. Pyramid är en solid figur, som inneslutes af flera triangulära plan, hvilka hafva en gemensam spets, och af ett plan, som begränsar dem.

A Pyramiden ABCDE inneslutes af ABC, ACD, ABE, AED, och af plana figuren BCDE.

Figuren BCDE kallas pyramidensbas, punkten A pyramidens spets, och räta lineerna AB, AC, BC etc. pyramidens sidor.

9. Prisma är en solid figur, som inneslutes af plan, bland hvilka tvänne, som stå midt emot hvarandra, äro parallela, lika stora och likformiga, och de öfriga parallelogrammer.

Prismat ABCDEF-GHKL, eller AK, inneslutes af figurerna ABCDE, FGHKL, som äro parallela, lika stora och likformiga, och af parallelogrammerna AG, EK, CK och BH.

De plana figurerna, ABCDE, FGHKL, som uti ett prisma stå midtemot hvarandra, och som äro parallela,lika stora och likformiga, kallas baser, och linieeran AF, EL, AB etc. prismats sidor eller kanter.

10. Ett prisma kallas vinkelrätt, då dess sidor äro vinkelräta mot basernas plan.

11. Parallelepiped är ett prisma, hvars baser äro parallelogrammer.

12. Kub är en solid figur, som inneslutes af sex qvadrater.

13. Höjden af en pyramid, eller af ett prisma, är den räta lineen, som drages vinkelrätt.. mot basens plan från en motstående solid vinkels spets.

14. Polyeder kallas hvar och en solid figur, som begränsas af endast plana ytor.

15. Convex Polyeder är den,hvars begränsande plan ej skära polyedern, om de utdragas; han har endast utgående solida vinklar, och en rä linea kan endast i tvänne punkter skära hans yta,

16. Convexa polyedrar äro likformiga,om de plan, som innesluta den ena polyedern, äro lika många och

likformiga med hvar sitt af de plan, som innesluta den andra.

I Proposition. Theorem.

Om tvänne plan skära hvarandra, så är deras afskärning en rät linea.

Bevis. Ty om icke afskärningen BD imellan de båda planer AB, BC, vore en rät linea; så kan man dock från B till D draga en rät linea BED uti planet AB, och en rät linea BFD uti planet BC (6 def. 1.), hvilka tvänne räta lineer alltså skulle innesluta ett rum; och då detta är

omöjligt, kan ingen annan än BD vara den räta lineen, som går genom punkterna B och D; alltså är BD en rät linea.

II Proposition. Theorem.

En rät linea kan ej till en del vara uti ett plan, och till en del utom detsamma.

Bevis. Ty om på räta lineen AC, som är uti planet MN, finnes en punkt B, som ej är i samma plan, så att ACB vore en rät linea; och om man genom denna räta linea drager ett plan, scm skär MN uti räta lineen ACD, a; så skulle genom de a. l prop. 11. tvänne punkterna A och C tvänne b. Cor. 14 pr.l. särskildta räta lineer kunna dragas, hvilket är omöjligt; alltså kan ej någon punkt af räta lineen AC vara utom planet MN; h. s. b.

Scholium. För att undersöka om en yta är ett plan, lägger man en lineal med dess räta linea på ytan i åtskilliga riktningar, och efterser, om denna räta linea öfverallt sammanträffar med ytan.

III Proposition. Theorem.

Tvänne räta lineer, som skära hvarandra, äro i samma plan. och bestämma detta plans läge.

13. Höjden af en pyramid, eller af ett prisma, är den räta lineen, som drages vinkelrätt.. mot basens plan från en motstående solid vinkels spets.

14. Polyeder kallas hvar och en solid figur, som begränsas af endast plana ytor.

15. Convex Polyeder är den,hvars begränsande plan ej skära polyedern, om de utdragas; han har endast utgående solida vinklar, och en rä linea kan endast i tvänne punkter skära hans yta,

16. Convexa polyedrar äro likformiga,om de plan, som innesluta den ena polyedern, äro lika många och likformiga med hvar sitt af de plan, som innesluta den andra.

I Proposition. Theorem.

Om tvänne plan skära hvarandra, så är deras afskärning en rät linea.

Bevis. Ty om icke afskärningen BD imellan de båda planer AB, BC, vore en rät linea; så kan man dock från B till D draga en rät linea BED uti planet AB, och en rät linea BFD uti planet BC (6 def. 1.), hvilka tvänne räta lineer alltså skulle innesluta ett rum; och då detta är

Elfte Boken. 239

omöjligt, kan ingen annan än BD vara den räta lineen, som går genom punkterna B och D; alltså är BD en rät linea.

II Proposition. Theorem.

En rät linea kan ej till en del vara uti ett plan, och till en del utom detsamma.

Bevis. Ty om på räta lineen AC, som är uti planet MN, finnes en punkt B, som ej är i samma plan, så att ACB vore en rät linea; och om man genom denna räta linea drager ett plan, scm skär MN uti räta lineen ACD, a; så skulle genom de a. l prop. 11. tvänne punkterna A och C tvänne b. Cor. 14 pr.l. särskildta räta lineer kunna dragas, hvilket är omöjligt; alltså kan ej någon punkt af räta lineen AC vara utom planet MN; h. s. b.

Scholium. För att undersöka om en yta är ett plan, lägger man en lineal med dess räta linea på ytan i åtskilliga riktningar, och efterser, om denna räta linea öfverallt sammanträffar med ytan.

III Proposition. Theorem.

Tvänne räta lineer, som skära hvarandra, äro i samma plan. och bestämma detta plans läge. 238 Elfte Boken.

13. Höjden af en pyramid, eller af ett prisma, är den räta lineen, som drages vinkelrätt.. mot basens plan från en motstående solid vinkels spets.

14. Polyeder kallas hvar och en solid figur, som begränsas af endast plana ytor.

15. Convex Polyeder är den,hvars begränsande plan ej skära polyedern, om de utdragas; han har endast utgående solida vinklar, och en rä linea kan endast i tvänne punkter skära hans yta,

16. Convexa polyedrar äro likformiga,om de plan, som innesluta den ena polyedern, äro lika många och likformiga med hvar sitt af de plan, som innesluta den andra.

I Proposition. Theorem.

Om tvänne plan skära hvarandra, så är deras afskärning en rät linea.

Bevis. Ty om icke afskärningen BD imellan de båda planer AB, BC, vore en rät linea; så kan man dock från B till D draga en rät linea BED uti planet AB, och en rät linea BFD uti planet BC (6 def. 1.), hvilka tvänne räta lineer alltså skulle innesluta ett rum; och då detta är

Elfte Boken. 239

omöjligt, kan ingen annan än BD vara den räta lineen, som går genom punkterna B och D; alltså är BD en rät linea.

II Proposition. Theorem.

En rät linea kan ej till en del vara uti ett plan, och till en del utom detsamma.

Bevis. Ty om på räta lineen AC, som är uti planet MN, finnes en punkt B, som ej är i samma plan, så att ACB vore en rät linea; och om man genom denna räta linea drager ett plan, scm skär MN uti räta lineen ACD, a; så skulle genom de a. l prop. 11. tvänne punkterna A och C tvänne b. Cor. 14 pr.l. särskildta räta lineer kunna dragas, hvilket är omöjligt; alltså kan ej någon punkt af räta lineen AC vara utom planet MN; h. s. b.

Scholium. För att undersöka om en yta är ett plan, lägger man en lineal med dess räta linea på ytan i åtskilliga riktningar, och efterser, om denna räta linea öfverallt sammanträffar med ytan.

III Proposition. Theorem.

Tvänne räta lineer, som skära hvarandra, äro i samma plan. och bestämma detta plans läge. 238 Elfte Boken.

13. Höjden af en pyramid, eller af ett prisma, är den räta lineen, som drages vinkelrätt.. mot basens plan från en motstående solid vinkels spets.

14. Polyeder kallas hvar och en solid figur, som begränsas af endast plana ytor.

15. Convex Polyeder är den,hvars begränsande plan ej skära polyedern, om de utdragas; han har endast utgående solida vinklar, och en rä linea kan endast i tvänne punkter skära hans yta,

16. Convexa polyedrar äro likformiga,om de plan, som innesluta den ena polyedern, äro lika många och likformiga med hvar sitt af de plan, som innesluta den andra.

I Proposition. Theorem.

Om tvänne plan skära hvarandra, så är deras afskärning en rät linea.

Bevis. Ty om icke afskärningen BD imellan de båda planer AB, BC, vore en rät linea; så kan man dock från B till D draga en rät linea BED uti planet AB, och en rät linea BFD uti planet BC (6 def. 1.), hvilka tvänne räta

lineer alltså skulle innesluta ett rum; och då detta är

omöjligt, kan ingen annan än BD vara den räta lineen, som går genom punkterna B och D; alltså är BD en rät linea.

II Proposition. Theorem.

En rät linea kan ej till en del vara uti ett plan, och till en del utom detsamma.

Bevis. Ty om på räta lineen AC, som är uti planet MN, finnes en punkt B, som ej är i samma plan, så att ACB vore en rät linea; och om man genom denna räta linea drager ett plan, scm skär MN uti räta lineen ACD, a; så skulle genom de a. l prop. 11. tvänne punkterna A och C tvänne b. Cor. 14 pr.l. särskildta räta lineer kunna dragas, hvilket är omöjligt; alltså kan ej någon punkt af räta lineen AC vara utom planet MN; h. s. b.

Scholium. För att undersöka om en yta är ett plan, lägger man en lineal med dess räta linea på ytan i åtskilliga riktningar, och efterser, om denna räta linea öfverallt sammanträffar med ytan.

III Proposition. Theorem.

Tvänne räta lineer, som skära hvarandra, äro i samma plan. och bestämma detta plans läge.240 Elfte Boken.

prop. 11.).

Bevis. Ty genom den ena räta lineen AB kan man föreställa sig ett plan, som hvälfver sig omkring AB till dess det sammanfaller med punkten C, då räta lineen AC har tvänne punkter A och C uti planet, och således är hel och hållen uti detsamma (2 prop. 11.) Alltså äro både AB och AC uti detta plan och bestämma dess läge; h, s. b.

Coroll. 1. En triangel, eller tre punktter, som icke äro uti en rät linea bestämnia ett plans läge.

Coroll 2. Tvänne parallela räta lineer bestämma ett plans läge.

IV Proposition. Theorem.

Om tvänne räta lineer skära hvarandra, och en tredje rät linea står uti afskärningspunkten vinkelrätt emot båda; så skall hon vara vinkelrät emot det plan, som går genom dessa båda lineerna,

Om räta lineerna AE, DG skära hvarandra uti B, och FB är vinkelrät mot AE och mot DG; så skall det bevisas,att FB är vinkelrät mot planet, som bestämmes af AE och DG.

Bevis. Tag AB, EB, GB, BD lika stora med hvarandra, drag räta lineerna AD och EG, och genom en punkt C på AD räta lineen CBH, som

då måste vara i samma plan, som AE och DG,a. Sammanbind någon punkt F på FB med A, C, D, G,H och E.

Uti hvardera af trianglarna ABD, GEB äro således tvänne sidor och mellanliggande vinkeln, b, lika stora; således måste, c, basen AD = EG och vink. DAB = BEG,

Uti de båda trianglarna, ACB, a. 2 prop. 11. EBH äro således tvänne vinklar b. 15 prop. 1. ABC, CAB samt sidan AB uti den c. 4 prop. 1. ena, lika stora med hvar sin d. 26 prop. 1. vinkel HBE+ HEB samt sidan EB e. 8 prop. 1. uti den andra triangeln; derföre f. 3 def. 11. måste, d, AC = EH och CB=:BH.

Vidare äro uti de båda trianglarna FBA, FBE tvänne sidor F B och BA samt den räta vinkeln, de omfatta, lika stora med FB och BE samt den räta vinkeln de omfatta; derföre måste, c, basen FA - FE. På samma sätt bevises, att ...... FD = FG.

Uti de båda trianglarna FAD, FEG, äro således trenne sidor uti den ena lika stora med hvar sin sida uti den andra; derföre måste, e, vink. FAC = FEH.

Således måste äfven uti de båda trianglarna FAC, FEH9 c,

Basen FC = FH. 240 Elfte Boken.

prop. 11.).

Bevis. Ty genom den ena räta lineen AB kan man föreställa sig ett plan, som hvälfver sig omkring AB till dess det sammanfaller med punkten C, då räta lineen AC har tvänne punkter A och C uti planet, och således är hel och hållen uti detsamma (2 prop. 11.) Alltså äro både AB och AC uti detta plan och bestämma dess läge; h, s. b.

Coroll. 1. En triangel, eller tre punktter, som icke äro uti en rät linea bestämnia ett plans läge.

Coroll 2. Tvänne parallela räta lineer bestämma ett plans läge.

IV Proposition. Theorem.

Om tvänne räta lineer skära hvarandra, och en tredje rät linea står uti afskärningspunkten vinkelrätt emot båda; så skall hon vara vinkelrät emot det plan, som går genom dessa båda lineerna,

Om räta lineerna AE, DG skära hvarandra uti B, och FB är vinkelrät mot AE och mot DG; så skall det bevisas,att FB är vinkelrät mot planet, som bestämmes af AE och DG.

Bevis. Tag AB, EB, GB, BD lika stora med hvarandra, drag räta lineerna AD och EG, och genom en punkt C på AD räta lineen CBH, som

då måste vara i samma plan, som AE och DG,a. Sammanbind någon punkt F på FB med A, C, D, G,H och E.

Uti hvardera af trianglarna ABD, GEB äro således tvänne sidor och mellanliggande vinkeln, b, lika stora; således måste, c, basen AD = EG och vink. DAB = BEG,

Uti de båda trianglarna, ACB, a. 2 prop. 11. EBH äro således tvänne vinklar b. 15 prop. 1. ABC, CAB samt sidan AB uti den c. 4 prop. 1. ena, lika stora med hvar sin d. 26 prop. 1. vinkel HBE+ HEB samt sidan EB e. 8 prop. 1. uti den andra triangeln; derföre f. 3 def. 11. måste, d, AC = EH och CB=:BH.

Vidare äro uti de båda trianglarna FBA, FBE tvänne sidor F B och BA samt den räta vinkeln, de omfatta, lika stora med FB och BE samt den räta vinkeln de omfatta; derföre måste, c, basen FA - FE. På samma sätt bevises, att ...... FD = FG.

Uti de båda trianglarna FAD, FEG, äro således trenne sidor uti den ena lika stora med hvar sin sida uti den andra; derföre måste, e, vink. FAC = FEH.

Således måste äfven uti de båda trianglarna FAC, FEH9 c,

Basen FC = FH.242

Elfte Boken.

Alltså äro alla tre sidorna uti triangeln FBC lika stora med hvar sin sida uti triangeln FBH, hvadan, e,

vinkeln FBC = FBH.

På samma sätt bevises, att FB är vinkelrät mot hvar och en annan rät linea, som går genom B uti det plan som bestämmes af AE och DG; alltså är FB vinkelrät mot detta plan, f; h. s. b.

ar

Co roll. 1. Den vinkelräta lineen FB kortare än någon annan rät linea från F till planet, 19 prop". 1; hon ar således punktens F af -stånd f rån planet.

C

/

W

Coroll. 2. Genom en punkt A uti ett gifvet plan kan blott en rät linea dragas vinkelrät mot samma plan. Ty om både AB och AC kunde dragas vinkelräta mot planet MN; så . skulle de båda vara vinkelräta mot afskärnings-lineen DE imellan deras plan och det gifna planet, hvilket är omöjligt.

Jcke heller kan man från en punkt utom elt plan draga flera än en rät linea vinkelrät mot delsamma (se fig. till prop. IV). Ty om både FB och FD vore vinkelräta mot planet AC; så skulle vinklarne FDB och FBD båda vara räta, hvilket är omöjligt; 17 pr. 1.

¥ Proposition. Theorem.

Om räta lineen AP är vinkelrät mot planet MN, och BC är en rät linea uti detta

plan, mot hvilken PD är dragen vinkelrätt; så skall, om A och D sammanbindas, AD vara vinkelrät mot B C.

A Tag DC: = DB,

sammanbind A och B, A och C, P och

CT> * *

Då ärouti trianglarna PCD, PBD, a,

basen PC-PB; och uti trianglarna APC, APB, a,

basen AB = AC.

Alltså äro uti trianglarna ADB, a. 4 prop. 1. ADC b. 8 prop- 1.

AD-AD? AB^AC, DC-DB;

hvadan, b, vinkeln ADB = ADC, h. s. b.

Corollarium. Häraf följer, att BC är vinkelrät mot planet AUP, 4 pr. 11.

Scholium. Uti AP och BC finner man exemplet af tvänne räta lineer, som ej kunna råkas; emedan de ej äro i samma plan. Kortaste afståndet mellan dem är räta lineen PD, som är vinkelrät emot bada. Ty AB > AD > FD, 17 och 19 pr. 1., och på samma sätt bevises, att PD är kortare, än hvar och en annan rät linea, som drages imellan BC och AP.

VI Proposition. Theorem.

Om en rät linea AP är vinkelrät emot ett plan, MN; så är hvar och en -linea DE, 242

Alltså äro alla tre sidorna uti triangeln FBC lika stora med hvar sin sida uti triangeln FBH, hvadan, e,

vinkeln FBC = FBH.

På samma sätt bevises, att FB är vinkelrät mot hvar och en annan rät linea, som går genom B uti det plan som bestämmes af AE och DG; alltså är FB vinkelrät mot detta plan, f; h. s. b.

ar

Co roll. 1. Den vinkelräta lineen FB kortare än någon annan rät linea från F till planet, 19 prop". 1; hon ar således punktens F af -stånd f rån planet.

C

/

W

Coroll. 2. Genom en punkt A uti ett gifvet plan kan blott en rät linea dragas vinkelrät mot samma plan. Ty om både AB och AC kunde dragas vinkelräta mot planet MN; så . skulle de båda vara vinkelräta mot afskärnings-lineen DE imellan deras plan och det gifna planet, hvilket är omöjligt.

Jcke heller kan man från en punkt utom elt plan draga flera än en rät linea vinkelrät mot delsamma (se fig. till prop. IV). Ty om både FB och FD vore vinkelräta mot planet AC; så skulle vinklarne FDB och FBD båda vara räta, hvilket är omöjligt; 17 pr. 1.

¥ Proposition. Theorem.

Om räta lineen AP är vinkelrät mot planet MN, och BC är en rät linea uti detta

plan, mot hvilken PD är dragen vinkelrätt; så skall, om A och D sammanbindas, AD vara vinkelrät mot B C.

A Tag DC: = DB,

sammanbind A och B, A och C, P och

CT> * *

Då ärouti trianglarna PCD, PBD, a,

basen PC-PB; och uti trianglarna APC, APB, a,

basen AB = AC.

Alltså äro uti trianglarna ADB, a. 4 prop. 1. ADC b. 8 prop- 1.

AD-AD? AB^AC, DC-DB;

hvadan, b, vinkeln ADB = ADC, h. s. b.

Corollarium. Häraf följer, att BC är vinkelrät mot planet AUP, 4 pr. 11.

Scholium. Uti AP och BC finner man exemplet af tvänne räta lineer, som ej kunna råkas; emedan de ej äro i samma plan. Kortaste afståndet mellan dem är räta lineen PD, som är vinkelrät emot bada. Ty AB > AD > FD, 17 och 19 pr. 1., och på samma sätt bevises, att PD är kortare, än hvar och en annan rät linea, som drages imellan BC och AP.

VI Proposition. Theorem.

Om en rät linea AP är vinkelrät emot ett plan, MN; så är hvar och en -linea DE, 242

Alltså äro alla tre sidorna uti triangeln FBC lika stora med hvar sin sida uti triangeln FBH, hvadan, e,

vinkeln FBC = FBH.

På samma sätt bevises, att FB är vinkelrät mot hvar och en annan rät linea, som går genom B uti det plan som bestämmes af AE och DG; alltså är FB vinkelrät mot detta plan, f; h. s. b.

ar

Co roll. 1. Den vinkelräta lineen FB kortare än någon annan rät linea från F till planet, 19 prop". 1; hon ar således punktens F af -stånd f rån planet.

C

/

W

Coroll. 2. Genom en punkt A uti ett gifvet plan kan blott en rät linea dragas vinkelrät mot samma plan. Ty om både AB och AC kunde dragas vinkelräta mot planet MN; så . skulle de båda vara vinkelräta mot afskärnings-lineen DE imellan deras plan och det gifna planet, hvilket är omöjligt.

Jcke heller kan man från en punkt utom elt plan draga flera än en rät linea vinkelrät mot delsamma (se fig. till prop. IV). Ty om både FB och FD vore vinkelräta mot planet AC; så skulle vinklarne FDB och FBD båda vara räta, hvilket är omöjligt; 17 pr. 1.

¥ Proposition. Theorem.

Om räta lineen AP är vinkelrät mot planet MN, och BC är en rät linea uti detta

plan, mot hvilken PD är dragen vinkelrätt; så skall, om A och D sammanbindas, AD vara vinkelrät mot B C.

A Tag DC: = DB,

sammanbind A och B, A och C, P och

CT> * *

Då ärouti trianglarna PCD, PBD, a,

basen PC-PB; och uti trianglarna APC, APB, a,

basen AB = AC.

Alltså äro uti trianglarna ADB, a. 4 prop. 1. ADC b. 8 prop- 1.

AD-AD? AB^AC, DC-DB;

hvadan, b, vinkeln ADB = ADC, h. s. b.

Corollarium. Häraf följer, att BC är vinkelrät mot planet AUP, 4 pr. 11.

Scholium. Uti AP och BC finner man exemplet af tvänne räta lineer, som ej kunna råkas; emedan de ej äro i samma plan. Kortaste afståndet mellan dem är räta lineen PD, som är vinkelrät emot bada. Ty AB > AD > FD, 17 och 19 pr. 1., och på samma sätt bevises, att PD är kortare, än hvar och en annan rät linea, som drages imellan BC och AP.

VI Proposition. Theorem.

Om en rät linea AP är vinkelrät emot ett plan, MN; så är hvar och en -linea DE,244

Elfte Boken.

som är parallel med AP, vinkelrät mot samma plan.

Bevis.Låtettplan vara draget genom AP och ED, och dess afskärning med M1V vara räta lineen PD; drag BC uti planet MN vinkelrät mot P D, och sammanbind A och D.

Enligt coroll. till nastföreg. theorem, måste BC vara vinkelrät mot planet ADP; men ED är i detta plan, således är BC vinkelrät mot ED, eller ED mot BC. Dessutom, efter AP är vinkelrät mot PD och parallel med DE, så är äfven DE vinkelrät mot PD; 29 pr. 1; och emedan således DE är vinkelrät både mot PD och BC, så måste hon vara vinkelrät mot deras plan MN, 4 prop. 11; h. s. b.

Corollarium 1. Om AP och DE äro

båda vinkelräta mot ett plan MN; sä äro de parallela. Ty om DE ej vore parallel med AP, så skulle man från D kunna draga en annan rät linea parallel med AP. Denna andra linea blefve då vinkelrät mot planet MN; och då skulle från en och samma punkt tvänne särskildta lineer kunna dragas vinkelräta mot planet MN, hvilket är omöjligt; således är DE parallel med AP.

Corollarium 2. Om tvänne räta lineer äro båda parallela med en tredje, så äro de sinsimel-

lan parallela, äfven om icke alla tre äro i samma plan; ty alla tre lineerna måste vara vinkelräta mot ett och samma plan.

VII Proposition. Theorem.

Om en rät linea 9 AB, är parallel med räta lineen CD dragen i planet MN, så skall AB vara parallel med detta plan MN.

Bevis. Ty om AB, som är uti planet ABCD, rått kade planet MN; så skulle det ske utinågonpåCD, som är afskärningslinea imellan planen AD och MN. Men nu kan ej AB råka CD, emedan hon är parallel med henne; således kan icke heller AB råka planet MN; hvadan AB är parallel med detta plan.

VIII Proposition» Theorem.

Om tvänne plany MN, PQ, äro vinkelräta mot en och samma räta linea AB; så äro de parallela med hvarandra.

Bevis. Ty om dessa plan råkade hvarandra, så låt O vara en punkt på deras afskärnipgslinea CH;

som är parallel med AP, vinkelrät mot samma plan.

Bevis.Låtettplan vara draget genom AP och ED, och dess afskärning med M1V vara räta lineen PD; drag BC uti planet MN vinkelrät mot P D, och sammanbind A och D.

Enligt coroll. till nastföreg. theorem, måste BC vara vinkelrät mot planet ADP; men ED är i detta plan, således är BC vinkelrät mot ED, eller ED mot BC. Dessutom, efter AP är vinkelrät mot PD och parallel med DE, så är äfven DE vinkelrät mot PD; 29 pr. 1; och emedan således DE är vinkelrät både mot PD och BC, så måste hon vara vinkelrät mot deras plan MN, 4 prop. 11; h. s. b.

Corollarium 1. Om AP och DE äro

båda vinkelräta mot ett plan MN; sä äro de parallela. Ty om DE ej vore parallel med AP, så skulle man från D kunna draga en annan rät linea parallel med AP. Denna andra linea blefve då vinkelrät mot planet MN; och då skulle från en och samma punkt tvänne särskildta lineer kunna dragas vinkelräta mot planet MN, hvilket är omöjligt; således är DE parallel med AP.

Corollarium 2. Om tvänne räta lineer äro båda parallela med en tredje, så äro de sinsimel-

lan parallela, äfven om icke alla tre äro i samma plan; ty alla tre lineerna måste vara vinkelräta mot ett och samma plan.

VII Proposition. Theorem.

Om en rät linea 9 AB, är parallel med räta lineen CD dragen i planet MN, så skall AB vara parallel med detta plan MN.

Bevis. Ty om AB, som är uti planet ABCD, rått kade planet MN; så skulle det ske utinågonpåCD, som är afskärningslinea imellan planen AD och MN. Men nu kan ej AB råka CD, emedan hon är parallel med henne; således

kan icke heller AB råka planet MN; hvadan AB är parallel med detta plan.

VIII Proposition» Theorem.

Om tvänne plany MN, PQ, äro vinkelräta mot en och samma räta linea AB; så äro de parallela med hvarandra.

Bevis. Ty om dessa plan råkade hvarandra, så låt O vara en punkt på deras afskärnipgslinea CH;

som är parallel med AP, vinkelrät mot samma plan.

Bevis.Låtettplan vara draget genom AP och ED, och dess afskärning med M1V vara räta lineen PD; drag BC uti planet MN vinkelrät mot P D, och sammanbind A och D.

Enligt coroll. till nastföreg. theorem, måste BC vara vinkelrät mot planet ADP; men ED är i detta plan, således är BC vinkelrät mot ED, eller ED mot BC. Dessutom, efter AP är vinkelrät mot PD och parallel med DE, så är äfven DE vinkelrät mot PD; 29 pr. 1; och emedan således DE är vinkelrät både mot PD och BC, så måste hon vara vinkelrät mot deras plan MN, 4 prop. 11; h. s. b.

Corollarium 1. Om AP och DE äro

båda vinkelräta mot ett plan MN; sä äro de parallela. Ty om DE ej vore parallel med AP, så skulle man från D kunna draga en annan rät linea parallel med AP. Denna andra linea blefve då vinkelrät mot planet MN; och då skulle från en och samma punkt tvänne särskildta lineer kunna dragas vinkelräta mot planet MN, hvilket är omöjligt; således är DE parallel med AP.

Corollarium 2. Om tvänne räta lineer äro båda parallela med en tredje, så äro de sinsimel-

lan parallela, äfven om icke alla tre äro i samma plan; ty alla tre lineerna måste vara vinkelräta mot ett och samma plan.

VII Proposition. Theorem.

Om en rät linea 9 AB, är parallel med räta lineen CD dragen i planet MN, så skall AB vara parallel med detta plan MN.

Bevis. Ty om AB, som är uti planet ABCD, rått kade planet MN; så skulle det ske utinågonpåCD, som är afskärningslinea imellan planen AD och MN. Men nu kan ej AB råka CD, emedan hon är parallel med henne; således

kan icke heller AB råka planet MN; hvadan AB är parallel med detta plan.

VIII Proposition» Theorem.

Om tvänne plany MN, PQ, äro vinkelräta mot en och samma räta linea AB; så äro de parallela med hvarandra.

Bevis. Ty om dessa plan råkade hvarandra, så låt O vara en punkt på deras afskärnipgslinea CH;

sammanbind och O.

A och O, B

M f f / \ \ \ v

Å

B

N Q

Då måste AB, som är vinkelrät mot båda planen MN och PQ, äfven vara vinkelrät emot båda räta lineerna AO och BO, hvilket är

omöjligt (17 prop. 1). Således kunna ej planen MN och PQ råka hvarandra; h. s. b.

IX Proposition. Theorem.

Om tvänne parallela plan MN', PQ skäras af ett tredje plan AH; så äro <ijskiirnm-garna AI, BH parallela.

Bevis. Ty om icke AI och BH vore parallela; så skulle de råka hvarandra när de utdragas, emedan de äro i samma plan AH; men då skulle äfven planen MN och PQ, uti hvilka dessa båda räta lineer äro, råka hvarandra, och således ej vara parallela.

HL Proposition. Tlteorent*

Om en räf linea AB är vinkelrät mot ett plan MN, sä är hon äfven vinkelrät mot planet PO, som är parallelt med MN.

M

N

T

Bevis. Drag räta lineen BC efter behag uti planet PQ, och låt ett plan gå genom AB och BC; ^dess afskärning AD med planet "MN måste vara parallel med BC, a. Nu är AB vinkelrät mot planet Q MN, och således äfven mot AD, b; samt emot den med a. 9 prop. 11. AD parallela lineen BC, c. Eme b- s def u dan alltså AB på detta sätt kan ?' 29 Pr°P' *' bevisas vara vinkelrät mot hvarje rät Jinea genom B uti planet PQ; så måste AB vara vinkelrät mot detta plan, b; h. s b.

.XI Proposition» Theorem*

Parallela räta lineer AB^ CD, som begränsas af parallela plan MN, PQ, äro U ka stora.

M

= CD,b; h. s.

Bevis. Detplan/AD, som går genom de par-N allela lieerna AB, CD, måste skära planen MN och PQ uti tvänne parallela lineer AC,

a, 9 pr. 11. BD, a.

b. 34 pr. 1. Aiitså

är AD en parallelo-Q gram, hvaraf följer att

CO

sammanbind och O.

A och O, B

M f f / \ \ \ v

Å

B

N Q

Då måste AB, som är vinkelrät mot båda planen MN och PQ, äfven vara vinkelrät emot båda räta lineerna AO och BO, hvilket är

omöjligt (17 prop. 1). Således kunna ej planen MN och PQ råka hvarandra; h. s. b.

IX Proposition. Theorem.

Om tvänne parallela plan MN', PQ skäras af ett tredje plan AH; så äro <ijskiirnm-garna AI, BH parallela.

Bevis. Ty om icke AI och BH vore parallela; så skulle de råka hvarandra när de utdragas, emedan de äro i samma plan AH; men då skulle äfven planen MN och PQ, uti hvilka dessa båda räta lineer äro, råka hvarandra, och således ej vara parallela.

HL Proposition. Tlteorent*

Om en räf linea AB är vinkelrät mot ett plan MN, sä är hon äfven vinkelrät mot planet PO, som är parallelt med MN.

M

N

T

Bevis. Drag räta lineen BC efter behag uti planet PQ, och låt ett plan gå genom AB och BC; ^dess afskärning AD med planet "MN måste vara parallel med BC, a. Nu är AB vinkelrät mot planet Q MN, och således äfven mot AD, b; samt emot den med a. 9 prop. 11. AD parallela lineen BC, c. Eme b- s def u dan alltså AB på detta sätt kan ?' 29 Pr°P' *' bevisas vara vinkelrät mot hvarje rät Jinea genom B uti planet PQ; så måste AB vara vinkelrät mot detta plan, b; h. s b.

.XI Proposition» Theorem*

Parallela räta lineer AB^ CD, som begränsas af parallela plan MN, PQ, äro U ka stora.

M

= CD,b; h. s.

Bevis. Detplan/AD, som går genom de par-N allela lieerna AB, CD, måste skära planen MN och PQ uti tvänne parallela lineer AC,

a, 9 pr. 11. BD, a.

b. 34 pr. 1. Aiitså

är AD en parallelo-Q gram, hvaraf följer att

CO

sammanbind och O.

A och O, B

M f f / \ \ \ v

Å

B

N Q

Då måste AB, som är vinkelrät mot båda planen MN och PQ, äfven vara vinkelrät emot båda räta lineerna AO och BO, hvilket är

omöjligt (17 prop. 1). Således kunna ej planen MN och PQ råka hvarandra; h. s. b.

IX Proposition. Theorem.

Om tvänne parallela plan MN', PQ skäras af ett tredje plan AH; så äro <ijskiirnm-garna AI, BH parallela.

Bevis. Ty om icke AI och BH vore parallela; så skulle de råka hvarandra när de utdragas, emedan de äro i samma plan AH; men då skulle äfven planen MN och PQ, uti hvilka dessa båda räta lineer äro, råka hvarandra, och således ej vara parallela.

HL Proposition. Tlteorent*

Om en räf linea AB är vinkelrät mot ett plan MN, sä är hon äfven vinkelrät mot planet PO, som är parallelt med MN.

M

N

T

Bevis. Drag räta lineen BC efter behag uti planet PQ, och låt ett plan gå genom AB och BC; ^dess afskärning AD med planet "MN måste vara parallel med BC, a. Nu är AB vinkelrät mot planet Q MN, och således äfven mot AD, b; samt emot den med a. 9 prop. 11. AD parallela lineen BC, c. Eme b- s def u dan alltså AB på detta sätt kan ?' 29 Pr°P' *' bevisas vara vinkelrät mot hvarje rät Jinea genom B uti planet PQ; så måste AB vara vinkelrät mot detta plan, b; h. s b.

.XI Proposition» Theorem*

Parallela räta lineer AB^ CD, som begränsas af parallela plan MN, PQ, äro U ka stora.

M

= CD,b; h. s.

Bevis. Detplan/AD, som går genom de par-N allela lieerna AB, CD, måste skära planen MN och PQ uti tvänne parallela lineer AC,

a, 9 pr. 11. BD, a.

b. 34 pr. 1. Aiitså

är AD en parallelo-Q gram, hvaraf följer att

CO

sammanbind och O.

A och O, B

M f f / \ \ \ v

Å

B

N Q

Då måste AB, som är vinkelrät mot båda planen MN och PQ, äfven vara vinkelrät emot båda räta lineerna AO och BO, hvilket är

omöjligt (17 prop. 1). Således kunna ej planen MN och PQ råka hvarandra; h. s. b.

IX Proposition. Theorem.

Om tvänne parallela plan MN', PQ skäras af ett tredje plan AH; så äro <ijskiirnm-garna AI, BH parallela.

Bevis. Ty om icke AI och BH vore parallela; så skulle de råka hvarandra när de utdragas, emedan de äro i samma plan AH; men då skulle äfven planen MN och PQ, uti hvilka dessa båda räta lineer äro, råka hvarandra, och således ej vara parallela.

HL Proposition. Tlteorent*

Om en räf linea AB är vinkelrät mot ett plan MN, sä är hon äfven vinkelrät mot planet PO, som är parallelt med MN.

M

N

T

Bevis. Drag räta lineen BC efter behag uti planet PQ, och låt ett plan gå genom AB och BC; ^dess afskärning AD med planet "MN måste vara parallel med BC, a. Nu är AB vinkelrät mot planet Q MN, och således äfven mot AD, b; samt emot den med a. 9 prop. 11. AD parallela lineen BC, c. Eme b- s def u dan alltså AB på detta sätt kan ?' 29 Pr°P' *' bevisas vara vinkelrät mot hvarje rät Jinea genom B uti planet PQ; så måste AB vara vinkelrät mot detta plan, b; h. s b.

.XI Proposition» Theorem*

Parallela räta lineer AB^ CD, som begränsas af parallela plan MN, PQ, äro U ka stora.

M

= CD,b; h. s.

Bevis. Detplan/AD, som går genom de par-N allela lieerna AB, CD, måste skära planen MN och PQ uti tvänne parallela lineer AC,

a, 9 pr. 11. BD, a.

b. 34 pr. 1. Aiitså

är AD en parallelo-Q gram, hvaraf följer att

Corollarium. Tvänne parallela plan äro öfverallt på lika afstånd från hvarandra, Ty dessa afstånd äro räta lineer, som äro vinkelräta mot båda planen, och följaktligen parallela med hvarandra, l Coroll. 6 prop. 11.

Proposition . Theorem.

Om tvänne räta lineer, AC, AE, som skära hvarandra, äro parallela med hvar sin af tvänne andra räta lineer , BD, BF, som skära hvarandra, men icke äro i samma plan som dessa; så skall de förras vinkel E AC vara lika stor med de sednares DBFS och de förras plan vara parallelt med de sednares plan.

']

l e vis. Tag AE = BD, AC = BF, och sammanbind E och C, A och B, E och D, C och F.

Emedan nu AC är parallel och lika stor med BF, så är figuren AF ?n parallelogram, a. Af lika skäl är AD en parallelogram. När såle-

a. 83 prop. 1. des både ED och CF äro parallela

b. S4 prop. 1. ^h lika stora med en och samma

c. 8 prop. l AB> b; så äro de sinsimellan parallela och lika stora; hvaraf följer, att EF är en parallelogram, a. Således äro sidorna AE, AC, EC lika stora med hvar sin af BD, BF, DF, b; alltså är vinkeln EAC = FBD, c; h. s. b.

Det skall vidare bevisas, att planet EAC är parallelt med planet DBF.

Ty om det plan, som genom A drages parallelt med planet DBF, träffade CF och ED icke uti C, utan i punkten G; så skulle, enligt Propositionen XI, de tre räta lineerna AB, GF vara lika stora; men det är redan bevist, att AB, CF äro lika stora; och således skulle CF = GF, hvilket är omöjligt. Alltså måste planet EAC vara parallelt med planet DBF, h. s. b.

Corollarium. Om tvänne plan AD, AF skära tvänne sinsimellan parallela plan EAC, DBF; så äro de vinklar EAC, DBF, som af-skärningslineerna formera, lika stora.

XIII Proposition. Theorem*

Om tre räta lineer, AB, CD, EF äro lika stora och parallela, men endast två och två bland dem i samma plan; så skola de trianglar., ACE, BDF, som formeras, då man sammanbinder dessa lineers yttersta ändar, vara lika stora, och dessa trianglars plan vara parallela.

Bevis. Ty då AB är parallel och lika stor med CD och med EF; så måste AC vara a. 33 prop. 1. parallel och lika medmedBD?och AEmed BF; samt

11*

Corollarium. Tvänne parallela plan äro öfverallt på lika afstånd från hvarandra, Ty dessa afstånd äro räta lineer, som äro vinkelräta mot båda planen, och följaktligen parallela med hvarandra, l Coroll. 6 prop. 11.

Proposition . Theorem.

Om tvänne räta lineer, AC, AE, som skära hvarandra, äro parallela med hvar sin af tvänne andra räta lineer , BD, BF, som skära hvarandra, men icke äro i samma plan som dessa; så skall de förras vinkel E AC vara lika stor med de sednares DBFS och de förras plan vara parallelt med de sednares plan.

']

l e vis. Tag AE = BD, AC = BF, och sammanbind E och C, A och B, E och D, C och F.

Emedan nu AC är parallel och lika stor med BF, så är figuren AF ?n parallelogram, a. Af lika skäl är AD en parallelogram. När såle-

a. 83 prop. 1. des både ED och CF äro parallela

b. S4 prop. 1. ^h lika stora med en och samma

c. 8 prop. l AB> b; så äro de sinsimellan parallela och lika stora; hvaraf följer, att EF är en parallelogram, a. Således äro sidorna AE, AC, EC lika stora med hvar sin af BD, BF, DF, b; alltså är vinkeln EAC = FBD, c; h. s. b.

Det skall vidare bevisas, att planet EAC är parallelt med planet DBF.

Ty om det plan, som genom A drages parallelt med planet DBF, träffade CF och ED icke uti C, utan i punkten G; så skulle, enligt Propositionen XI, de tre räta lineerna AB, GF vara lika stora; men det är redan bevist, att AB, CF äro lika stora; och således skulle CF = GF, hvilket är omöjligt. Alltså måste planet EAC vara parallelt med planet DBF, h. s. b.

Corollarium. Om tvänne plan AD, AF skära tvänne sinsimellan parallela plan EAC, DBF; så äro de vinklar EAC, DBF, som af-skärningslineerna formera, lika stora.

XIII Proposition. Theorem*

Om tre räta lineer, AB, CD, EF äro lika stora och parallela, men endast två och två bland dem i samma plan; så skola de trianglar., ACE, BDF, som formeras, då man sammanbinder dessa lineers yttersta ändar, vara lika stora, och dessa trianglars plan vara parallela.

Bevis. Ty då AB är parallel och lika stor med CD och med EF; så måste AC vara a. 33 prop. 1. parallel och lika medmedBD?och AEmed BF; samt

11*

Corollarium. Tvänne parallela plan äro öfverallt på lika afstånd från hvarandra, Ty dessa afstånd äro räta lineer, som äro vinkelräta mot båda planen, och följaktligen parallela med hvarandra, l Coroll. 6 prop. 11.

Proposition . Theorem.

Om tvänne räta lineer, AC, AE, som skära hvarandra, äro parallela med hvar sin af tvänne andra räta lineer , BD, BF, som skära hvarandra, men icke äro i samma plan som dessa; så skall de förras vinkel E AC vara lika stor med de sednares DBFS och de förras plan vara parallelt med de sednares plan.

']

l e vis. Tag AE = BD, AC = BF, och sammanbind E och C, A och B, E och D, C och F.

Emedan nu AC är parallel och lika stor med BF, så är figuren AF ?n parallelogram, a. Af lika skäl är AD en parallelogram. När såle-

a. 83 prop. 1. des både ED och CF äro parallela

b. S4 prop. 1. ^h lika stora med en och samma

c. 8 prop. l AB> b; så äro de sinsimellan parallela och lika stora; hvaraf följer, att EF är en parallelogram, a. Således äro sidorna AE, AC, EC lika stora med hvar sin af BD, BF, DF, b; alltså är vinkeln EAC = FBD, c; h. s.

Det skall vidare bevisas, att planet EAC är parallelt med planet DBF.

Ty om det plan, som genom A drages parallelt med planet DBF, träffade CF och ED icke uti C, utan i punkten G; så skulle, enligt Propositionen XI, de tre räta lineerna AB, GF vara lika stora; men det är redan bevist, att AB, CF äro lika stora; och således skulle CF = GF, hvilket är omöjligt. Alltså måste planet EAC vara parallelt med planet DBF, h. s. b.

Corollarium. Om tvänne plan AD, AF skära tvänne sinsimellan parallela plan EAC, DBF; så äro de vinklar EAC, DBF, som af-skärningslineerna formera, lika stora.

XIII Proposition. Theorem*

Om tre räta lineer, AB, CD, EF äro lika stora och parallela, men endast två och två bland dem i samma plan; så skola de trianglar., ACE, BDF, som formeras, då man sammanbinder dessa lineers yttersta ändar, vara lika stora, och dessa trianglars plan vara parallela.

Bevis. Ty då AB är parallel och lika stor med CD och med EF; så måste AC vara a. 33 prop. 1. parallel och lika medmedBD?och AEmed BF; samt

CE med DF, a; hvadan triangeln ACE måste va ra lika stor med BDF , b, och enligt nästföregående proposition dessa trianglars plan vara parallela, h. s. b. a. 33 prop. 1. b 4 prop. 1.

XIV Proposition. Theorem.

Or/i tvänne räta lineer skäras of parallela plan, så blifva delarne proportionella.

Låt de parallela planen

' PQ' RS> skära räta H neen AB uti A, E, B, och

räta lineen CD uti C, F, D;

så skall det bevisas, ät;

AE:EB = CF:FD.

j

R D

Bevis. Drag CB, som råkar planet PQ uti en punkt O; sammanbind A och C, E och O, F och O, B och D.

Emedan planen äro parallela, så måste af-

a. 9 prop. 11. skärningarna EO och AC sins-

b. 2 prop. 6. imellan, samt FÖ och BD sins c 11 prop. 5. imellan vara parallela, a.

Derföre mate

AE:EB = CO.OB, b

samt .....CO:OB = CF:FD;

hvaraf följer, att AE:EB=CF:FD, c; h. s. b.

Proposition* Theorem.

Om en rät linea Af är vinkelrät mot ett plan MN, så skall hvarje plan APB, som går genom AP vara vinkelrätt mot MN.

Bevis. Låt BP vara afskärningen imellan planen MN och APB, drag uti planet MN, en rät linea DP vinkelrät mot BP.

Emedan AP är vinkelrät mot MN, så är APD en rät vinkel, a; men denna vinkel är måttet for båda planens MN och APB lutning mot hvarandra; emedan både AP och DP äro vinkelräta mot den gemen- a. 3 def. 11. gamma afskär- b- 5 def-11-ningslineen, BP, b; alltså är planet APB vinkelrätt mot planet MN, h. s. b.

Corollarium. Dä trenne räta lineer, AP, V B, P D räkas i en punkt och äro Vinkelräta mot hvarandra; så äro de trenne plan, som fle bestämma, vinkelräta mot

1LVI Proposition* Theorem.

Om tvänne plan, AB, mot hvarandras och nmn

BJS'^ äro vinkelrä-frän hvilhin punkt 250

A /l.,,......

Elfte Boken.

CE med DF, a; hvadan triangeln ACE måste va ra lika stor med BDF , b, och enligt nästföregående proposition dessa trianglars plan vara parallela, h. s. b. a. 33 prop. 1. b 4 prop. 1.

XIV Proposition. Theorem.

Or/i tvänne räta lineer skäras of parallela plan, så blifva delarne proportionella.

Låt de parallela planen

' PQ' RS> skära räta H neen AB uti A, E, B, och

räta lineen CD uti C, F, D;

så skall det bevisas, ät;

AE:EB = CF:FD.

j

R D

Bevis. Drag CB, som råkar planet PQ uti en punkt O; sammanbind A och C, E och O, F och O, B och D.

Emedan planen äro parallela, så måste af-

a. 9 prop. 11. skärningarna EO och AC sins-

b. 2 prop. 6. imellan, samt FÖ och BD sins c 11 prop. 5. imellan vara parallela, a.

Derföre mate

AE:EB = CO.OB, b

samt .....CO:OB = CF:FD;

hvaraf följer, att AE:EB=CF:FD, c; h. s. b.

Proposition* Theorem.

Om en rät linea Af är vinkelrät mot ett plan MN, så skall hvarje plan APB, som går genom AP vara vinkelrätt mot MN.

Bevis. Låt BP vara afskärningen imellan planen MN och APB, drag uti planet MN, en rät linea DP vinkelrät mot BP.

Emedan AP är vinkelrät mot MN, så är APD en rät vinkel, a; men denna vinkel är måttet for båda planens MN och APB lutning mot hvarandra; emedan både AP och DP äro vinkelräta mot den gemen- a. 3 def. 11. gamma afskär- b- 5 def-11-ningslineen, BP, b; alltså är planet APB vinkelrätt mot planet MN, h. s. b.

Corollarium. Dä trenne räta lineer, AP, V B, P D räkas i en punkt och äro Vinkelräta mot hvarandra; så äro de trenne plan, som fle bestämma, vinkelräta mot

1LVI Proposition* Theorem.

Om tvänne plan, AB, mot hvarandras och nmn

BJS'^ äro vinkelrä-frän hvilhin punkt 250

A /l.,,......

CE med DF, a; hvadan triangeln ACE måste va ra lika stor med BDF , b, och enligt nästföregående proposition dessa trianglars plan vara parallela, h. s. b. a. 33 prop. 1. b 4 prop. 1.

XIV Proposition. Theorem.

Or/i tvänne räta lineer skäras of parallela plan, så blifva delarne proportionella.

Låt de parallela planen

' PQ' RS> skära räta H neen AB uti A, E, B, och

räta lineen CD uti C, F, D;

så skall det bevisas, ät;

AE:EB = CF:FD.

j

R D

Bevis. Drag CB, som råkar planet PQ uti en punkt O; sammanbind A och C, E och O, F och O, B och D.

Emedan planen äro parallela, så måste af-

a. 9 prop. 11. skärningarna EO och AC sins-

b. 2 prop. 6. imellan, samt FÖ och BD sins c 11 prop. 5. imellan vara parallela, a.

Derföre mate

AE:EB = CO.OB, b

samt .....CO:OB = CF:FD;

hvaraf följer, att AE:EB=CF:FD, c; h. s. b.

Proposition* Theorem.

Om en rät linea Af är vinkelrät mot ett plan MN, så skall hvarje plan APB, som går genom AP vara vinkelrätt mot MN.

Bevis. Låt BP vara afskärningen imellan planen MN och APB, drag uti planet MN, en rät linea DP vinkelrät mot BP.

Emedan AP är vinkelrät mot MN, så är APD en rät vinkel, a; men denna vinkel är måttet for båda planens MN och APB lutning mot hvarandra; emedan både AP och DP äro vinkelräta mot den gemen- a. 3 def. 11. gamma afskär- b- 5 def-11-ningslineen, BP, b; alltså är planet APB vinkelrätt mot planet MN, h. s. b.

Corollarium. Dä trenne räta lineer, AP, V B, P D räkas i en punkt och äro Vinkelräta mot hvarandra; så äro de trenne plan, som fle bestämma, vinkelräta mot

1LVI Proposition* Theorem.

Om tvänne plan, AB, mot hvarandras och nmn

BJS'^ äro vinkelrä-frän hvilhin punkt 250

A /l.,,......

CE med DF, a; hvadan triangeln ACE måste va ra lika stor med BDF , b, och enligt nästföregående proposition dessa trianglars plan vara parallela, h. s. b. a. 33 prop. 1. b 4 prop. 1.

XIV Proposition. Theorem.

Or/i tvänne räta lineer skäras of parallela plan, så blifva delarne proportionella.

Låt de parallela planen

' PQ' RS> skära räta H neen AB uti A, E, B, och

räta lineen CD uti C, F, D;

så skall det bevisas, ät;

AE:EB = CF:FD.

j

R D

Bevis. Drag CB, som råkar planet PQ uti en punkt O; sammanbind A och C, E och O, F och O, B och D.

Emedan planen äro parallela, så måste af-

a. 9 prop. 11. skärningarna EO och AC sins-

b. 2 prop. 6. imellan, samt FÖ och BD sins c 11 prop. 5. imellan vara parallela, a.

Derföre mate

AE:EB = CO.OB, b

samt .....CO:OB = CF:FD;

hvaraf följer, att AE:EB=CF:FD, c; h. s. b.

Proposition* Theorem.

Om en rät linea Af är vinkelrät mot ett plan MN, så skall hvarje plan APB, som går genom AP vara vinkelrätt mot MN.

Bevis. Låt BP vara afskärningen imellan planen MN och APB, drag uti planet MN, en rät linea DP vinkelrät mot BP.

Emedan AP är vinkelrät mot MN, så är APD en rät vinkel, a; men denna vinkel är måttet for båda planens MN och APB lutning mot hvarandra; emedan både AP och DP äro vinkelräta mot den gemen- a. 3 def. 11. gamma afskär- b- 5 def-11-ningslineen, BP, b; alltså är planet APB vinkelrätt mot planet MN, h. s. b.

Corollarium. Dä trenne räta lineer, AP, V B, P D räkas i en punkt och äro Vinkelräta mot hvarandra; så äro de trenne plan, som fle bestämma, vinkelräta mot

1LVI Proposition* Theorem.

Om tvänne plan, AB, mot hvarandras och nmn

BJS'^ äro vinkelrä-frän hvilhin punkt252

P, som heldst, på deras afskärningslinea PB drager uti det ena planet AB en rät linea AP, vinkelrät mot afskärningslineen PB; så skall AP vara vinkelrät mot det andra planet BN.

Bevis. Ty om man uti planet BN drager DP vinkelrät mot PB; så äro uti hvartdera planet dragna AP och DP vinkelräta mot afskärningslineen PB; hvadan APD är måttet för platt nens lutning mot hvandra; men dessa plan supponeras vara vinkelräta mot hvarandra: alltså är APD en rät vinkel. Då således AP är vinkelrät både mot PB och PD, så är hon vinkelrät mot Planet BN. 4 pr. 11; h. s. b.

XVII Proposition*

Om tvänne plan, DM, DN, äro vinkelräta mot ett tredje plan DB; så skall deras af-skärningslinea vara vinkelrät mot detta tredje plan.

A M Bevis. Ty om den räta lineen

DA, som från de trenne planens gmensamma afskärnings-punkt drages vinkelrätt mot planet DB5 ej vore i planet DM; så skulle uti detta plan DM en annan rät linea ED kunna dragas vinkelrät mot planet DB; och således tvän-

ne räta lineer uti punkten D vara vinkelräta mot planet DB, hvilket är omöjligt. Således måste DA vara i planet DM. På samma sätt bevises, att DA måste vara i planet DN; hvaraf följer att DA är afskärningslineen imellan båda planen DM, DN, hvilken alltså är vinkelrät mot planet DB; h. s. b.

XVIII Proposition. Theorem.

Om en solid vinkel omfattas af tre plana vinklar, så äro två och två af dem tillhopa-tagne större än den tredje, ehuru de tagas

Bevis. Om alla tre vinklarne äro lika stora, så är det klart, att två af dem tillhopatagne äro större än den tredje; men om vinkeln ASB är större än hvar och en af de båda öfriga; så skall det bevisas, att ASB < ASC + CSB.

Rita uti planet ASB vinkeln BSD = BSC, drag räta lineen ADB huru som heldst i samma plan, gör SC = SD, sammanbind A och C, B och C.

Emedan trianglarne BSD, BSC hafva två sidor och mellanliggande vinklarna lika stora; så är basen BD = BC, a; men AB a. 4 prop. 1.

< AC + BC, b derföre måste AD *. j&O prop. 1.

< AC; och således vinkeln ASD, c* 2o Pr°P' ** som står emot den mindre basen , mindre än ASC? r,

252

Elfte Boken.

P, som heldst, på deras afskärningslinea PB drager uti det ena planet AB en rät linea AP, vinkelrät mot afskärningslineen PB; så skall AP vara vinkelrät mot det andra planet BN.

Bevis. Ty om man uti planet BN drager DP vinkelrät mot PB; så äro uti hvartdera planet dragna AP och DP vinkelräta mot afskärningslineen PB; hvadan APD är måttet för platt nens lutning mot hvandra; men dessa plan supponeras vara vinkelräta mot hvarandra: alltså är APD en rät vinkel. Då således AP är vinkelrät både mot PB och PD, så är hon vinkelrät mot Planet BN. 4 pr. 11; h. s. b.

XVII Proposition*

Om tvänne plan, DM, DN, äro vinkelräta mot ett tredje plan DB; så skall deras af-skärningslinea vara vinkelrät mot detta tredje plan.

A M Bevis. Ty om den räta lineen

DA, som från de trenne planens gmensamma afskärnings-punkt drages vinkelrätt mot planet DB5 ej vore i planet DM; så skulle uti detta plan DM en annan rät linea ED kunna dragas vinkelrät mot planet DB; och således tvän-

Elfte Boken.

253

ne räta lineer uti punkten D vara vinkelräta mot planet DB, hvilket är omöjligt. Således måste DA vara i planet DM. På samma sätt bevises, att DA måste vara i planet DN; hvaraf följer att DA är afskärningslineen imellan båda planen DM, DN, hvilken alltså är vinkelrät mot planet DB; h. s. b.

XVIII Proposition. Theorem.

Om en solid vinkel omfattas af tre plana vinklar, så äro två och två af dem tillhopa-tagne större än den tredje, ehuru de tagas

Bevis. Om alla tre vinklarne äro lika stora, så är det klart, att två af dem tillhopatagne äro större än den tredje; men om vinkeln ASB är större än hvar och en af de båda öfriga; så skall det bevisas, att ASB < ASC + CSB.

Rita uti planet ASB vinkeln BSD = BSC, drag räta lineen ADB huru som heldst i samma plan, gör SC = SD, sammanbind A och C, B och C.

Emedan trianglarne BSD, BSC hafva två sidor och mellanliggande vinklarna lika stora; så är basen BD = BC, a; men AB a. 4 prop. 1.

< AC + BC, b derföre måste AD *. j&O prop. 1.

< AC; och således vinkeln ASD, c* 2o Pr°P' ** som står emot den mindre basen , mindre än ASC? r,

252

Elfte Boken.

P, som heldst, på deras afskärningslinea PB drager uti det ena planet AB en rät linea AP, vinkelrät mot afskärningslineen PB; så skall AP vara vinkelrät mot det andra planet BN.

Bevis. Ty om man uti planet BN drager DP vinkelrät mot PB; så äro uti hvartdera planet dragna AP och DP vinkelräta mot afskärningslineen PB; hvadan APD är måttet för platt nens lutning mot hvandra; men dessa plan supponeras vara vinkelräta mot hvarandra: alltså är APD en rät vinkel. Då således AP är vinkelrät både mot PB och PD, så är hon vinkelrät mot Planet BN. 4 pr. 11; h. s. b.

XVII Proposition*

Om tvänne plan, DM, DN, äro vinkelräta mot ett tredje plan DB; så skall deras af-skärningslinea vara vinkelrät mot detta tredje plan.

A M Bevis. Ty om den räta lineen

DA, som från de trenne planens gmensamma afskärnings-punkt drages vinkelrätt mot planet DB5 ej vore i planet DM; så skulle uti detta plan DM en annan rät linea ED kunna dragas vinkelrät mot planet DB; och således tvän-

ne räta lineer uti punkten D vara vinkelräta mot planet DB, hvilket är omöjligt. Således måste DA vara i planet DM. På samma sätt bevises, att DA måste vara i planet DN; hvaraf följer att DA är afskärningslineen imellan båda planen DM, DN, hvilken alltså är vinkelrät mot planet DB; h. s. b.

XVIII Proposition. Theorem.

Om en solid vinkel omfattas af tre plana vinklar, så äro två och två af dem tillhopa-tagne större än den tredje, ehuru de tagas

Bevis. Om alla tre vinklarne äro lika stora, så är det klart, att två af dem tillhopatagne äro större än den tredje; men om vinkeln ASB är större än hvar och en af de båda öfriga; så skall det bevisas, att ASB < ASC + CSB.

Rita uti planet ASB vinkeln BSD = BSC, drag räta lineen ADB huru som heldst i samma plan, gör SC = SD, sammanbind A och C, B och C.

Emedan trianglarne BSD, BSC hafva två sidor och mellanliggande vinklarna lika stora; så är basen BD = BC, a; men AB a. 4 prop. 1.

< AC + BC, b derföre måste AD *. j&O prop. 1.

< AC; och således vinkeln ASD, c* 2o Pr°P' ** som står emot den mindre basen , mindre än ASC? r,

Då såleles ASD så måste ASD + BSD d. v. s......ASB

< ASC

< ASC + BSD,

< ASC -f BSC; h. s. b.

Proposition. Theorem.'

De plana vinklar, af hvilka en solid vinkel omfattas, äro tillhoputagne mindre än fyra

räta vinklar.

Låt deri solida vinkeln S omfatta»; af fyra plana vinklar ASB, BSC, CSD, DS A; det skall bevisas, att dessa fyra vinklar äro tillhopatagne, mindre än fyra räta.

.Bevis. Drag ett plan ABCD, som skär de fyra vinklarnas plan huru som heldst, och derigenom formerar en plan fyrsidig figur ABCD.

Vid hvardera af denna plana figurs horn A, B, C, !) Hr spetsen af en solid vinkel, uti hvilken tv ii och två vinklar tillhopatagne äro större än den tredje, a; så att vinklarne a. 18 prop. 11. BAS + DAS > DAB,

ABS -f CBS > ABC,

BCS + DCS > DCB,

ADS+CDS > ADC;

sk att alla åtta vinklarne BAS -f DAS 4 ABS -f etc. äro större än den fyrsidiga figurens fyra vinklar tillhopa, det vill säga, större än fyra räta, (plarii-metri, probl. 9). Men nu äro uti de fyra tri-

änglarna, som hafva sina spetsar uti S, alla tolf vinklarne tillhopatagne lika stora med åtta räta (32 prop. 1.), och det är bevist att åtta af dem äro större än fyra räta; derföre måste de återstående fyra vinklarne vid S tillhopatagne vara mindre än fyra räta vinklar; h. s. b.

Proposition. Theorem.

Örn trenne vinklar, som omfatta en so-lid vink el 9 åto lika stora med hvar sin af trenne vinklar, som omfatta en annan solid vinkel; så skola tvä och l vä vinkel plan , uti hvilka leka stora vinklar äro, hafva lika lut-ningar mot hvarandra.

C G

Lat vinkeln BAC ~ FEG, BAD = FEH,

CAD ~ GE!!; så skall det bevisas, att planen BAC och BAD göra lika vinkel mot hvarandra, som planen FEG och FEH, o. s. v.

Bevis. Drag från en punkt B på AB, räta lineen BD uti planet BAD, och BC uti planet BAC, båda vinkelräta mot AB; gör EF-AB» drfrg FH uti 251

Då såleles ASD så måste ASD + BSD d. v. s......ASB

< ASC

< ASC + BSD,

< ASC -f BSC; h. s. b.

Proposition. Theorem.'

De plana vinklar, af hvilka en solid vinkel omfattas, äro tillhoputagne mindre än fyra

räta vinklar.

Låt deri solida vinkeln S omfatta»; af fyra plana vinklar ASB, BSC, CSD, DS A; det skall bevisas, att dessa fyra vinklar äro tillhopatagne, mindre än fyra räta.

.Bevis. Drag ett plan ABCD, som skär de fyra vinklarnas plan huru som heldst, och derigenom formerar en plan fyrsidig figur ABCD.

Vid hvardera af denna plana figurs horn A, B, C, !) Hr spetsen af en solid vinkel, uti hvilken tv ii och två vinklar tillhopatagne äro större än den tredje, a; så att vinklarne a. 18 prop. 11. BAS + DAS > DAB,

ABS -f CBS > ABC,

BCS + DCS > DCB,

ADS+CDS > ADC;

sk att alla åtta vinklarne BAS -f DAS 4 ABS -f etc. äro större än den fyrsidiga figurens fyra vinklar tillhopa, det vill säga, större än fyra räta, (plarii-metri, probl. 9). Men nu äro uti de fyra tri-

änglarna, som hafva sina spetsar uti S, alla tolf vinklarne tillhopatagne lika stora med åtta räta (32 prop. 1.), och det är bevist att åtta af dem äro större än fyra räta; derföre måste de återstående fyra vinklarne vid S tillhopatagne vara mindre än fyra räta vinklar; h. s. b.

Proposition. Theorem.

Örn trenne vinklar, som omfatta en so-lid vink el 9 åto lika stora med hvar sin af trenne vinklar, som omfatta en annan solid vinkel; så skola tvä och l vä vinkel plan , uti hvilka leka stora vinklar äro, hafva lika lut-ningar mot hvarandra.

C G

Lat vinkeln BAC ~ FEG, BAD = FEH,

CAD ~ GE!!; så skall det bevisas, att planen BAC och BAD göra lika vinkel mot hvarandra, som planen FEG och FEH, o. s. v.

Bevis. Drag från en punkt B på AB, räta lineen BD uti planet BAD, och BC uti planet BAC, båda vinkelräta mot AB; gör EF-AB» drfrg FH uti 251

Elfte Boken.

Då såleles ASD så måste ASD + BSD d. v. s......ASB

< ASC

< ASC + BSD,

< ASC -f BSC; h. s. b.

Proposition. Theorem.'

De plana vinklar, af hvilka en solid vinkel omfattas, äro tillhoputagne mindre än fyra

räta vinklar.

Låt deri solida vinkeln S omfatta»; af fyra plana vinklar ASB, BSC, CSD, DS A; det skall bevisas, att dessa fyra vinklar äro tillhopatagne, mindre än fyra räta.

.Bevis. Drag ett plan ABCD, som skär de fyra vinklarnas plan huru som heldst, och derigenom formerar en plan fyrsidig figur ABCD.

Vid hvardera af denna plana figurs horn A, B, C, !) Hr spetsen af en solid vinkel, uti hvilken tv ii och två vinklar tillhopatagne äro större än den tredje, a; så att vinklarne a. 18 prop. 11. BAS + DAS > DAB,

ABS -f CBS > ABC,

BCS + DCS > DCB,

ADS+CDS > ADC;

sk att alla åtta vinklarne BAS -f DAS 4 ABS -f etc. äro större än den fyrsidiga figurens fyra vinklar tillhopa, det vill säga, större än fyra räta, (plarii-metri, probl. 9). Men nu äro uti de fyra tri-

Elfte Boken.

255

änglarna, som hafva sina spetsar uti S, alla tolf vinklarne tillhopatagne lika stora med åtta räta (32 prop. 1.), och det är bevist att åtta af dem äro större än fyra räta; derföre måste de återstående fyra vinklarne vid S tillhopatagne vara mindre än fyra räta vinklar; h. s. b.

Proposition. Theorem.

Örn trenne vinklar, som omfatta en so-lid vink el 9 åto lika stora med hvar sin af trenne vinklar, som omfatta en annan solid vinkel; så skola tvä och l vä vinkel plan , uti hvilka leka stora vinklar äro, hafva lika lut-ningar mot hvarandra.

C G

Lat vinkeln BAC ~ FEG, BAD = FEH,

CAD ~ GE!!; så skall det bevisas, att planen BAC och BAD göra lika vinkel mot hvarandra, som planen FEG och FEH, o. s. v.

Bevis. Drag från en punkt B på AB, räta lineen BD uti planet BAD, och BC uti planet BAC, båda vinkelräta mot AB; gör EF-AB» drfrg FH uti256

planet FEH; och FG uti planet FEG vinkelräta mot EF; sammanbind C och D, G och H.

Då äro uti trianglarna ABC5 EFG vinklarne vid A och E, samt vid B och F lika stora, och AB==EF; derföre måste BC-FG, och AC

a. 26 prop. 1. =EG, a. På samma sätt bevises,

b. 4 prop. 1. att BD _ pH oc]l AD = EH. Uti

c. 8 prop. 1. trianglarna ACD> EGH? måste således basen CD = GH? b.

Alla sidorna uti triangeln BCD äro således lika stora med hvar sin sida uti triangeln FGH; derföre måste vinkeln CBD = GFH? c. Men dessa båda vinklar äro de, som planen BAC och BAD, samt FEG och-PEH göra mot hvarandra, hvilka alltså äro lika stora.

Genom alldeles lika construction i anseende till AC och EG, samt AD och EH, som i anseende till AB och EF, bevises, att vinkeln imellan planen BAC och CAD är lika stor med vin-kela mellan planen FEG och GEH, samt att vin-- keln mellan planen BAD och CAD är lika stor med vinkeln mellan planen FEH och GEH; h. s. b.

Scholium. Om man lägger sol. vinkeln A uti E, så att triangeln BAD till alla delar träffar in med triangeln FEH; så kan hända,

l:o Att AC faller på samma sida om planet FEH som EG; och då ar det klart, att de solida vinklarne A och E äro congruenta, d. v. s, att de till alla delar träffa in med hvarandra, om man ställer den ena uti den andra; hvilket bevises såsom 4:de prop. 1. I denna händelse sägas de lika stora plana vinklarne uti hvardera solida vinkeln vara lika ställda.

2:o Att AC och EG komma på hvar sin sida om planet FEH; då de solida vinklarne väl icke äro congruenta; men dock till alla sina delar lika stora, i enlighet med nyss bevista Theorem.

Lika stora och likformiga solida vinklar , som ej äro congruenta kallas Symetriska.

XXI Proposition. Tlieorein.

Tvänne convexa polyedrar kunna ej hafva samma > och lika mång a spetsar., utan, att till alla delar träffa in med hvarandra.

Bevis. Trenne af de gemensamma spetsarne, som bestämma ett plan på den ena polyedern,, måste äfven bestämma samma plan på den andra; emedan endast ett plan kan dragas genom trenne punkter, l Cor. 3 pr. 11. Då således alla de plan, som innesluta den ena polyedern, inträffa med hvar sitt af de plan, som innesluta den andra;

måste dessa polyedrar vara congruenta.

Skulle åter några af den andra polyederns plan endast gå genom tvänne spetsar till den förra; så skulle dessa plan skära den förra polyedern, och således någondera af polyedrarna vara icke convex.

Proposition. Theorem.

Tvänne prismer äro lika stora, då de Irenne plan, som omfatta en solid vtnkel i det 256

planet FEH; och FG uti planet FEG vinkelräta mot EF; sammanbind C och D, G och H.

Då äro uti trianglarna ABC5 EFG vinklarne vid A och E, samt vid B och F lika stora, och AB==EF; derföre måste BC-FG, och AC

a. 26 prop. 1. =EG, a. På samma sätt bevises,

b. 4 prop. 1. att BD _ pH oc]l AD = EH. Uti

c. 8 prop. 1. trianglarna ACD> EGH? måste således basen CD = GH? b.

Alla sidorna uti triangeln BCD äro således lika stora med hvar sin sida uti triangeln FGH; derföre måste vinkeln CBD = GFH? c. Men dessa båda vinklar äro de, som planen BAC och BAD, samt FEG och-PEH göra mot hvarandra, hvilka alltså äro lika stora.

Genom alldeles lika construction i anseende till AC och EG, samt AD och EH, som i anseende till AB och EF, bevises, att vinkeln imellan planen BAC och CAD är lika stor med vin-kela mellan planen FEG och GEH, samt att vin-- keln mellan planen BAD och CAD är lika stor med vinkeln mellan planen FEH och GEH; h. s. b.

Scholium. Om man lägger sol. vinkeln A uti E, så att triangeln BAD till alla delar träffar in med triangeln FEH; så kan hända,

l:o Att AC faller på samma sida om planet FEH som EG; och då ar det klart, att de solida vinklarne A och E äro congruenta, d. v. s, att de till alla delar träffa in med hvarandra, om man ställer den ena uti den andra; hvilket bevises såsom 4:de prop. 1. I denna händelse sägas de lika stora plana vinklarne uti hvardera solida vinkeln vara lika ställda.

2:o Att AC och EG komma på hvar sin sida om planet FEH; då de solida vinklarne väl icke äro congruenta; men dock till alla sina delar lika stora, i enlighet med nyss bevista Theorem.

Lika stora och likformiga solida vinklar , som ej äro congruenta kallas Symetriska.

XXI Proposition. Tlieorein.

Tvänne convexa polyedrar kunna ej hafva samma > och lika mång a spetsar., utan, att till alla delar träffa in med hvarandra.

Bevis. Trenne af de gemensamma spetsarne, som bestämma ett plan på den ena polyedern,, måste äfven bestämma samma plan på den andra; emedan endast ett plan kan dragas genom trenne punkter, l Cor. 3 pr. 11. Då således alla de plan, som innesluta den ena polyedern, inträffa med hvar sitt af de plan, som innesluta den andra; måste dessa polyedrar vara congruenta.

Skulle åter några af den andra polyederns plan endast gå genom tvänne spetsar till den förra; så skulle dessa plan skära den förra polyedern, och således någondera af polyedrarna vara icke convex.

Proposition. Theorem.

Tvänne prismer äro lika stora, då de Irenne plan, som omfatta en solid vtnkel i det 256

planet FEH; och FG uti planet FEG vinkelräta mot EF; sammanbind C och D, G och H.

Då äro uti trianglarna ABC5 EFG vinklarne vid A och E, samt vid B och F lika stora, och AB==EF; derföre måste BC-FG, och AC

a. 26 prop. 1. =EG, a. På samma sätt bevises,

b. 4 prop. 1. att BD _ pH oc]l AD = EH. Uti

c. 8 prop. 1. trianglarna ACD> EGH? måste således basen CD = GH? b.

Alla sidorna uti triangeln BCD äro således lika stora med hvar sin sida uti triangeln FGH; derföre måste vinkeln CBD = GFH? c. Men dessa båda vinklar äro de, som planen BAC och BAD, samt FEG och-PEH göra mot hvarandra, hvilka alltså äro lika stora.

Genom alldeles lika construction i anseende till AC och EG, samt AD och EH, som i anseende till AB och EF, bevises, att vinkeln imellan planen BAC och CAD är lika stor med vin-kela mellan planen FEG och GEH, samt att vin-- keln mellan planen BAD och CAD är lika stor med vinkeln mellan planen FEH och GEH; h. s. b.

Scholium. Om man lägger sol. vinkeln A uti E, så att triangeln BAD till alla delar träffar in med triangeln FEH; så kan hända,

l:o Att AC faller på samma sida om planet FEH som EG; och då ar det klart, att de solida vinklarne A och E äro congruenta, d. v. s, att de till alla delar träffa in med hvarandra, om man ställer den ena uti den andra; hvilket bevises såsom 4:de prop. 1. I denna händelse sägas de lika stora plana vinklarne uti hvardera solida vinkeln vara lika ställda.

2:o Att AC och EG komma på hvar sin sida om planet FEH; då de solida vinklarne väl icke äro congruenta; men dock till alla sina delar lika stora, i enlighet med nyss bevista Theorem.

Lika stora och likformiga solida vinklar , som ej äro congruenta kallas Symetriska.

XXI Proposition. Tlieorein.

Tvänne convexa polyedrar kunna ej hafva samma > och lika mång a spetsar., utan, att till alla delar träffa in med hvarandra.

Bevis. Trenne af de gemensamma spetsarne, som bestämma ett plan på den ena polyedern,, måste äfven bestämma samma plan på den andra; emedan endast ett plan kan dragas genom trenne punkter, l Cor. 3 pr. 11. Då således alla de plan, som innesluta den ena polyedern, inträffa med hvar sitt af de plan, som innesluta den andra; måste dessa polyedrar vara congruenta.

Skulle åter några af den andra polyederns plan endast gå genom tvänne spetsar till den förra; så skulle dessa plan skära den förra polyedern, och således någondera af polyedrarna vara icke convex.

Proposition. Theorem.

Tvänne prismer äro lika stora, då de Irenne plan, som omfatta en solid vtnkel i det258

ena prismat, äro congruenta och lika ställda .med hvar silt af trenne plan, som omfatta en solid vinkel uti det andra prismat.

Låt basen DEFG vara congruent med basen defg, parallelogrammer AEmed par allelogrammen ae,och parallelograinmen BF med parallelograinmen

bf; så skall det bevi-*" ..

sas, att prismat ABCE är congruent med prismat

abce.

Bevis. Ty om man lägger prismerna uti hvaran dra, sä att baserna till alla delar träffa in med hvarandra; så måste den solida vinkeln vid E till al la delar träffa in med den solida vinkeln vid e, emedan vinkeln BED = bed, BEF = bef och DEF = def, och dessa vinklar äro lika ställda, a. Så

a. 20 prop. 11. ledes måste sidan EB träffa in med

b. 21 prop. Ii, sjf]an ^ ocn BÄ med ba, eme i, det 11. jan para|Jel0grammerna R D och

bil äro congruenta; och af lika orsak BC träffa in med be; samt alltså öfra basen AC träffa in meii ilen congruenta basen ac, c. Emedan såle des båda prismerna hafva samma spetsar, måste ue vara congruenta, b; h, s. b.

C o r o 11. Vin k el ra t a p r is m e r, so m h a f u a LO/igruentu baser och lika stora höjder, äro congf aenta. Ty då DE ~ de och höjden BE =z be; ba måste rectangeln AE vara congruent med rectangt:ln ac; och af lika orsak rectangeln BI;

congruent med bf. Emedan således de trenne planen vid E och e uti båda prismerna äro congruenta och lika ställda; så måste, enligt detta Theorem, prismerna vara congruenta.

XJLIII Proposition. Theorem.

Uti hvar och en parullelepiped äro de plan, som sta midtemot hvarandra parallela och eongruenta.

Bevis. Enligt definition 11 och 13 måste baserna AH, BG vara parallela och congruenta: det skall bevisas, att tvänne motstående sidoplan, t. ex. AF, DG, äro parallela och congruenta.

BF och EG äro parallela och lika stora; emedan BG är en parallelogram, a. Likaså äro CF och HG parallela och lika stora; hvaraf följer att vinkeln BFC = EGH, och a. 34 prop. 1. att planet AF * är parallelt med b. 12 prop. 11. planet DG, b. Triangeln BFC c' 4 Pr°P' 1-är alltså congruent med triangeln EGH, c, samt således äfven parallelogrammen AF = DG, a; h. s. b.

Scholium. En parallelepiped bestämmes genom tre gifna räta lineer FB, FC, FG, som träffas i en gemensam punkt F, och göra med hvarandra gifna vinklar BFC, BFG, CFG» Då

ena prismat, äro congruenta och lika ställda .med hvar silt af trenne plan, som omfatta en solid vinkel uti det andra prismat.

Låt basen DEFG vara congruent med basen defg, parallelogrammer AEmed par allelogrammen ae,och parallelograinmen BF med parallelograinmen

bf; så skall det bevi-*" ..

sas, att prismat ABCE är congruent med prismat

abce.

Bevis. Ty om man lägger prismerna uti hvaran dra, sä att baserna till alla delar träffa in med hvarandra; så måste den solida vinkeln vid E till al la delar träffa in med den solida vinkeln vid e, emedan vinkeln BED = bed, BEF = bef och DEF = def, och dessa vinklar äro lika ställda, a. Så

a. 20 prop. 11. ledes måste sidan EB träffa in med

b. 21 prop. Ii, sjf]an ^ ocn BÄ med ba, eme i, det 11. jan para|Jel0grammerna R D och

bil äro congruenta; och af lika orsak BC träffa in med be; samt alltså öfra basen AC träffa in meii ilen congruenta basen ac, c. Emedan såle des båda prismerna hafva samma spetsar, måste ue vara congruenta, b; h, s. b.

C o r o 11. Vin k el ra t a p r is m e r, so m h a f u a LO/igruentu baser och lika stora höjder, äro congf aenta. Ty då DE ~ de och höjden BE =z be; ba måste rectangeln AE vara congruent med rectangt:ln ac; och af lika orsak rectangeln BI;

congruent med bf. Emedan således de trenne planen vid E och e uti båda prismerna äro congruenta och lika ställda; så måste, enligt detta Theorem, prismerna vara congruenta.

XJLIII Proposition. Theorem.

Uti hvar och en parullelepiped äro de plan, som sta midtemot hvarandra parallela och eongruenta.

Bevis. Enligt definition 11 och 13 måste baserna AH, BG vara parallela och congruenta: det skall bevisas, att tvänne motstående sidoplan, t. ex. AF, DG, äro parallela och congruenta.

BF och EG äro parallela och lika stora; emedan BG är en parallelogram, a. Likaså äro CF och HG parallela och lika stora; hvaraf följer att vinkeln BFC = EGH, och a. 34 prop. 1. att planet AF * är parallelt med b. 12 prop. 11. planet DG, b. Triangeln BFC c' 4 Pr°P' 1-är alltså congruent med triangeln EGH, c, samt således äfven parallelogrammen AF = DG, a; h. s. b.

Scholium. En parallelepiped bestämmes genom tre gifna räta lineer FB, FC, FG, som träffas i en gemensam punkt F, och göra med hvarandra gifna vinklar BFC, BFG, CFG» Då

dessa trenne lineer och vinklar äro gifna, behöfver man 5 för att fullborda parallelepipeden, endast genom yttersta ändan af hvar och en af dessa lineer draga ett plan, parallelt med de båda ötrigas plan; nämligen genom punkten B ett plan parallelt med CFG, genom punkten C ett plan parallelt med BFG, och genom punkten G ett plan parallelt med BFC. Dessa sex plan formera parallelepipeden.

Diagonalerna uti en parallelogram skära hvarandra midtitu.

Ty vinkeln BAB = ECD, och vinkeln EBA

a. 29 pr. 1. = EDC, a,

b. 34 pr. 1. samt sidan

c. 26 pr. 1. ABz-CD3bj

B c derföre måste AE = EC,

och BE = ÉD, c; h. s. b.

XXIV Proposition. Vlieorem.

Uti hvar och en parallelepiped äro de motstående solida vinklarne symetriska: och parallelepipedens fyra diagonaler skära hvarandra midtitu.

Bevis. De solida vinklarne B och E omfattas af de plana vinklarne GBC = DEP, CBA = FEH och

GB A = DE H, hvaraf följer, enl. 20: 11. att de trenne planen omkring den solida viji-keln B hafva lika lutningar mot hvarandra, som de trenne planen omkring den solida vinkeln E. Men om man lägger plana vinkeln DEH på plana vinkeln GB A, så att de träffa in med hvarandra; så falla lineerna EF och BC på hvar sin sida om planet GBA; hvadan ,de^solida vinklarne äro symetriska; h. s* b>

Diagonalerna uti para^lelogrammen ACHF skära hvarandra midtitu enl. nästf. Lemma, men dessa diagonaler äro parallelepipedens diagonaler, som således skära, hvarandra midtitu, h. s. b.

XXV* Proposition. Theorem,

.. skäres af parallela plan*

så blifva^afsäringarne lika stora och likformiga.

De parallela planen KM, OQ skära planet BF uti parallela lineerna KL, ÖP, a. a. O pr. 11. Af lika skäl äro två och två af alla b- 12 pr. 11. de öfriga sid«$ia% uti figurerna KM e* 8* im l' och OQ parallela; hvaraf följer, att dessa figurer måste vara likvinkliga, så att vinkeln OPQ = KLM o. s, v., b,- 260

dessa trenne lineer och vinklar äro gifna, behöfver man 5 för att fullborda parallelepipeden, endast genom yttersta ändan af hvar och en af dessa lineer draga ett plan, parallelt med de båda ötrigas plan; nämligen genom punkten B ett plan parallelt med CFG, genom punkten C ett plan parallelt med BFG, och genom punkten G ett plan parallelt med BFC. Dessa sex plan formera parallelepipeden.

Diagonalerna uti en parallelogram skära hvarandra midtitu.

Ty vinkeln BAB = ECD, och vinkeln EBA

a. 29 pr. 1. = EDC, a,

b. 34 pr. 1. samt sidan

c. 26 pr. 1. ABz-CD3bj

B c derföre måste AE = EC,

och BE = ÉD, c; h. s. b.

XXIV Proposition. Vlieorem.

Uti hvar och en parallelepiped äro de motstående solida vinklarne symetriska: och parallelepipedens fyra diagonaler skära hvarandra midtitu.

Bevis. De solida vinklarne B och E omfattas af de plana vinklarne GBC = DEP, CBA = FEH och

GB A = DE H, hvaraf följer, enl. 20: 11. att de trenne planen omkring den solida viji-keln B hafva lika lutningar mot hvarandra, som de trenne planen omkring den solida vinkeln E. Men om man lägger plana vinkeln DEH på plana vinkeln GB A, så att de träffa in med hvarandra; så falla lineerna EF och BC på hvar sin sida om planet GBA; hvadan ,de^solida vinklarne äro symetriska; h. s* b>

Diagonalerna uti para^lelogrammen ACHF skära hvarandra midtitu enl. nästf. Lemma, men dessa diagonaler äro parallelepipedens diagonaler, som således skära, hvarandra midtitu, h. s. b.

XXV* Proposition. Theorem,

.. skäres af parallela plan*

så blifva^afsäringarne lika stora och likformiga.

De parallela planen KM, OQ skära planet BF uti parallela lineerna KL, ÖP, a. a. O pr. 11. Af lika skäl äro två och två af alla b- 12 pr. 11. de öfriga sid«$ia% uti figurerna KM e* 8* im l' och OQ parallela; hvaraf följer, att dessa figurer måste vara likvinkliga, så att vinkeln OPQ = KLM o. s, v., b,- 260

dessa trenne lineer och vinklar äro gifna, behöfver man 5 för att fullborda parallelepipeden, endast genom yttersta ändan af hvar och en af dessa lineer draga ett plan, parallelt med de båda ötrigas plan; nämligen genom punkten B ett plan parallelt med CFG, genom punkten C ett plan parallelt med BFG, och genom punkten G ett plan parallelt med BFC. Dessa sex plan formera parallelepipeden.

Diagonalerna uti en parallelogram skära hvarandra midtitu.

Ty vinkeln BAB = ECD, och vinkeln EBA

a. 29 pr. 1. = EDC, a,

b. 34 pr. 1. samt sidan

c. 26 pr. 1. ABz-CD3bj

B c derföre måste AE = EC,

och BE = ÉD, c; h. s. b.

XXIV Proposition. Vlieorem.

Uti hvar och en parallelepiped äro de motstående solida vinklarne symetriska: och parallelepipedens fyra diagonaler skära hvarandra midtitu.

Bevis. De solida vinklarne B och E omfattas af de plana vinklarne GBC = DEP, CBA = FEH och

GB A = DE H, hvaraf följer, enl. 20: 11. att de trenne planen omkring den solida viji-keln B hafva lika lutningar mot hvarandra, som de trenne planen omkring den solida vinkeln E. Men om man lägger plana vinkeln DEH på plana vinkeln GB A, så att de träffa in med hvarandra; så falla lineerna EF och BC på hvar sin sida om planet GBA; hvadan ,de^solida vinklarne äro symetriska; h. s* b>

Diagonalerna uti para^lelogrammen ACHF skära hvarandra midtitu enl. nästf. Lemma, men dessa diagonaler äro parallelepipedens diagonaler, som således skära, hvarandra midtitu, h. s. b.

XXV* Proposition. Theorem,

.. skäres af parallela plan*

så blifva^afsäringarne lika stora och likformiga.

De parallela planen KM, OQ skära planet BF uti parallela lineerna KL, ÖP, a. a. O pr. 11. Af lika skäl äro två och två af alla b- 12 pr. 11. de öfriga sid«$ia% uti figurerna KM e* 8* im l' och OQ parallela; hvaraf följer, att dessa figurer måste vara likvinkliga, så att vinkeln OPQ = KLM o. s, v., b,-262 Elfte Boken.

Då figuren KP således är en parallelogram, så måste ÖP = KL ; c och på samma sätt bevises att PQ = LM o. s. v., hvadan figu ren OQ måste vara likformig ocli lika stor med KM, h. s. b.

Corollarium, Häraf följer y att o m e i t p r is m a ska r t s ff en plan, som är parallelt med ba sen; s ef m å si e a f ska r n in^ en v a -ra likformig och lika stor med basen.

Proposition"

'

De tvänne trekantiga symetriska Prismer JBUHEF, BCDEGH, uti hvilka paraflelepi-pr-clen ÄG kan delaf^ äro lika* stora. >$

Bevis. Om man utdrager sidorna G?f,'HK, och genom punkterna 43^ E drager de båda*plärien Al , FL båda vinkelräta**hiot prisihats sidtÄ^ch följaktligen parallela med hvarandra ; så^jfiva dessa båda afskärningar AI, FL likformigsw^och lika a. 25 prop. 11. stora, a Emedan TÄR och BI, samt AB och Kl äro parallela, såsom afskärnin gar af tvänne parallela plan med fgi!j£ "tredje, så är AI en parallelogram. v<(Pä samm^ sätt bevises, att FL, KF, KL, etc. äro parailelog^ - *.* ^ -------- ÄT ^^fi^drE

följer , att solida figuren AL är ett

mer; hvaraf Pelrätt prisma.

Delar man nu detta vinkelräta prisma uti tvänne trekantiga prismer, LOE^KB; OEFKBA,

genom diagonalplanetKE; så skall det först bevisas, att trekantiga prismerna ABDFEH, ABKFEO äro lika stora.

Dessa båda prismer hafva en gemensam del ABDFEO, det återstår således endast att bevisa, att trekantiga pyramiderna KABD, OFEH äro lika stora.

Emedan KO -BEcDH, a, så måste K D =OH; och om man föreställer sig, att a. 34 prop. 1. de båda pyramiderna ställas uti ^- 4 Pr°P- IL

hvarandra, så att de båda congru- 01° "'

. i 4-11 11 i i ^ ..«. c

enta baserna till alla delar träffa

in på hvarandra, punkten A på F, B på E, och D på H; så skall KD träffa in med OH, emedan de äro vinkelräta mot samma plan EFO. De båda pyramiderna träffa således till alla delar in med hvarandra, och det sneda prismat ABDFEH är lika stort med det vinkelräta prismat ABKFEO.

På samma sätt bevises, att de fyrkantiga pyramiderna BICDK, ELGHO äro lika stora, hvaraf följer, att det sneda prismat BCDEGH är lika stort med det vinkelräta BIKELO. Men de båda vinkelräta prismerna äro lika stora, emedan de hafva samma höjd och lika stora baser, c; derföre måste äfven de sneda prismerna vara lika stora; h s. b.

18

.

Pr°P- l Coroll 262 Elfte Boken.

Då figuren KP således är en parallelogram, så måste ÖP = KL ; c och på samma sätt bevises att PQ = LM o. s. v., hvadan figu ren OQ måste vara likformig ocli lika stor med KM, h. s. b.

Corollarium, Häraf följer y att o m e i t p r is m a ska r t s ff en plan, som är parallelt med ba sen; s ef m å si e a f ska r n in^ en v a -ra likformig och lika stor med basen.

Elfte Boken.

263

Proposition"

'

De tvänne trekantiga symetriska Prismer JBUHEF, BCDEGH, uti hvilka paraflelepi-pr-clen ÄG kan delaf^ äro

lika* stora. >$

Bevis. Om man utdrager sidorna G?f,'HK, och genom punkterna 43^ E drager de båda*plärien Al , FL båda vinkelräta**hiot prisihats sidtÄ^ch följaktligen parallela med hvarandra ; så^jfiva dessa båda afskärningar AI, FL likformigsw^och lika a. 25 prop. 11. stora, a Emedan TÄR och BI, samt AB och Kl äro parallela, såsom afskärnin gar af tvänne parallela plan med fgi!j£ "tredje, så är AI en parallelogram. v<(Pä samm^ sätt bevises, att FL, KF, KL, etc. äro parailelog^ - *.* ^ -------- ÄT ^^fi^drE

följer , att solida figuren AL är ett

mer; hvaraf Pelrätt prisma.

Delar man nu detta vinkelräta prisma uti tvänne trekantiga prismer, LOE^KB; OEFKBA,

genom diagonalplanetKE; så skall det först bevisas, att trekantiga prismerna ABDFEH, ABKFEO äro lika stora.

Dessa båda prismer hafva en gemensam del ABDFEO, det återstår således endast att bevisa, att trekantiga pyramiderna KABD, OFEH äro lika stora.

Emedan KO -BEcDH, a, så måste K D =OH; och om man föreställer sig, att a. 34 prop. 1. de båda pyramiderna ställas uti ^- 4 Pr°P- IL

hvarandra, så att de båda congru- 01° "'

. i 4-11 11 i i ^ ..«. c

enta baserna till alla delar träffa

in på hvarandra, punkten A på F, B på E, och D på H; så skall KD träffa in med OH, emedan de äro vinkelräta mot samma plan EFO. De båda pyramiderna träffa således till alla delar in med hvarandra, och det sneda prismat ABDFEH är lika stort med det vinkelräta prismat ABKFEO.

På samma sätt bevises, att de fyrkantiga pyramiderna BICDK, ELGHO äro lika stora, hvaraf följer, att det sneda prismat BCDEGH är lika stort med det vinkelräta BIKELO. Men de båda vinkelräta prismerna äro lika stora, emedan de hafva samma höjd och lika stora baser, c; derföre måste äfven de sneda prismerna vara lika stora; h s. b.

18

.

Pr°P- l Coroll264

Corollarium. Hvart och ett trekantigt prisma är halfparter af ett fyrkantigt prisma, som har en solid vinkel, och trenne kanter omkring honom, gemensamma med oet trekantiga.

Proposition* Theorem*

Tvänne parallelepipeder, ÄG, DK som stå på samma bas BD, och hvilkas öfra baser, FHy KL, äro i samma plan och imellan samma parallela lineer, FM, EL, äro lika stora.

Bevis. Emedan de plana vinklarne omkring solida vinkeln E äro lika stora och lika ställda med hvar sin plan vinkel omkring solida vinkeln H, derföre att AE och DH, samt EF och HG äro parallela, a; Ä ~ så måste den solida vinkeln E

a. 12 prop. 11. vara congruent med den solida 1>. 20 prop. 11. vinkeln vid H, b. Kanterna EF, c. 22 prop. 11. FJ F4 äro Rka gtora med hyar

.

sin af HG, HL, HD; således äro de plan, som omfatta den solida vinkeln E, congruenta med hvar sitt af de plan, som omfatta den solida vinkeln H, hvaraf följer, att trekantiga prismat AEIBFK är lika stort med trekantiga prismat DHLCGM, c.

Lägger man då solida figuren ABKIDHGC till på båda ställen, så blifver parallelepipeden = DK, h. s. b.

Proposition. Theorem.

Parallelepipeder9 som stå på samma bas, och hafva lika höjd, äro lika stora.

Bevis. Om de bådaparallejepipederna ÄG, AC, stå på samma bas, AB, och äro lika höga; så måste deras öfra baser GF, EC, vara i samma plan.

Utdrager man då sidorna DF, GL, CM, NE; så måste de skära hvarandra och formera en parallelogram HK/som äfven är i samma plan,som GF och CE.

Nu måste en parallelepiped, hvars baser äro AB, HK, vara lika stor med parallelepipeden AC; ty de hafva basen AB gemensam, och deras öfra baser äro i samma plan och imellan samma parallela lineer (27 prop. 11.); och af samma skäl måste den förra parallelepipeden vara lika stor med parallelep. ÄG; alltså är AC = ÄG; h. s. b.264

Elfte Boken.

Corollarium. Hvart och ett trekantigt prisma är halfparter af ett fyrkantigt prisma, som har en solid vinkel, och trenne kanter omkring honom, gemensamma med oet trekantiga.

Proposition* Theorem*

Tvänne parallelepipeder, ÄG, DK som stå på samma bas BD, och hvilkas öfra baser, FHy KL, äro i samma plan och imellan samma parallela lineer, FM, EL, äro lika stora.

Bevis. Emedan de plana vinklarne omkring solida vinkeln E äro lika stora och lika ställda med hvar sin plan vinkel omkring solida vinkeln H, derföre att AE och DH, samt EF och HG äro parallela, a; Ä ~ så måste den solida vinkeln E

a. 12 prop. 11. vara congruent med den solida 1>. 20 prop. 11. vinkeln vid H, b. Kanterna EF, c. 22 prop. 11. FJ F4 äro Rka gtora med hyar

Elfte Boken.

265

.

sin af HG, HL, HD; således äro de plan, som omfatta den solida vinkeln E, congruenta med hvar sitt af de plan, som omfatta den solida vinkeln H, hvaraf följer, att trekantiga prismat AEIBFK är lika stort med trekantiga prismat DHLCGM, c.

Lägger man då solida figuren ABKIDHGC till på båda ställen, så blifver parallelepipeden = DK, h. s. b.

Proposition. Theorem.

Parallelepipeder9 som stå på samma bas, och hafva lika höjd, äro lika stora.

Bevis. Om de bådaparallejepipederna ÄG, AC, stå på samma bas, AB, och äro lika höga; så måste deras öfra baser GF, EC, vara i samma plan.

Utdrager man då sidorna DF, GL, CM, NE; så måste de skära hvarandra och formera en parallelogram HK/som äfven är i samma plan,som GF och CE.

Nu måste en parallelepiped, hvars baser äro AB, HK, vara lika stor med parallelepipeden AC; ty de hafva basen AB gemensam, och deras öfra baser äro i samma plan och imellan samma parallela lineer (27 prop. 11.); och af

samma skäl måste den förra parallelepipeden vara lika stor med parallelep. ÄG; alltså är AC = ÄG; h. s. b.264

Elfte Boken.

Corollarium. Hvart och ett trekantigt prisma är halfparter af ett fyrkantigt prisma, som har en solid vinkel, och trenne kanter omkring honom, gemensamma med oet trekantiga.

Proposition* Theorem*

Tvänne parallelepipeder, ÄG, DK som stå på samma bas BD, och hvilkas öfra baser, FHy KL, äro i samma plan och imellan samma parallela lineer, FM, EL, äro lika stora.

Bevis. Emedan de plana vinklarne omkring solida vinkeln E äro lika stora och lika ställda med hvar sin plan vinkel omkring solida vinkeln H, derföre att AE och DH, samt EF och HG äro parallela, a; Ä ~ så måste den solida vinkeln E

a. 12 prop. 11. vara congruent med den solida 1>. 20 prop. 11. vinkeln vid H, b. Kanterna EF, c. 22 prop. 11. FJ F4 äro Rka gtora med hyar

Elfte Boken.

265

.

sin af HG, HL, HD; således äro de plan, som omfatta den solida vinkeln E, congruenta med hvar sitt af de plan, som omfatta den solida vinkeln H, hvaraf följer, att trekantiga prismat AEIBFK är lika stort med trekantiga prismat DHLCGM, c.

Lägger man då solida figuren ABKIDHGC till på båda ställen, så blifver parallelepipeden = DK, h. s. b.

Proposition. Theorem.

Parallelepipeder9 som stå på samma bas, och hafva lika höjd, äro lika stora.

Bevis. Om de bådaparallejepipederna ÄG, AC, stå på samma bas, AB, och äro lika höga; så måste deras öfra baser GF, EC, vara i samma plan.

Utdrager man då sidorna DF, GL, CM, NE; så måste de skära hvarandra och formera en parallelogram HK/som äfven är i samma plan,som GF och CE.

Nu måste en parallelepiped, hvars baser äro AB, HK, vara lika stor med parallelepipeden AC; ty de hafva basen AB gemensam, och deras öfra baser äro i samma plan och imellan samma parallela lineer (27 prop. 11.); och af samma skäl måste den förra parallelepipeden vara lika stor med parallelep. ÄG; alltså är AC = ÄG; h. s. b.266

Elfte Boken.

Proposition. Theorem.

Hvar och en parallelepiped är lilla stor med en rätvinklig parallelepiped, som med honom har lilt a stor bas och höjd.

H

Bevis. Om ett af den gifna parallelepipedens si~ doplan, HIMB, är rectangel; så kan man genom sidorna Hl, IM, MB, BH föreställa sig plan vara dragna vinkelräta mot planet BI, somformeraenrätvinkligparallelepipedHEFIMBA, hvilken vore lika stor med den gifna parallelepi-peden, emedan HIMB vore deras gemensamma bas, och deras höjder lika stora.

Men om HIMB icke är en rectangel; så drag ML, BO vinkelräta mot Hl, och genom dessa räta lineer planen BD, MG vinkelräta mot planet MM; så uppkommer deraf en rätvinklig parallelepiped, ODCLMBA, som är lika stor med HEF1MBA, emedan de hafva samma bas AB, och samma höjd»

På detta sätt kan hvar och en gifven parallelepiped förändras till en med honom lika stor parallelepiped, som har tvänne sidoplan vinkelräta mot basernas plan; och sedan denna nja paral-lelepiped förändras till en med honom lika stor rätvinklig parallelepiped; h, s. b.

Proposition.

Rätvinkliga parallelepipeder, som hafva samma bas, förhålla sig till hvarandra, som deras höjder.

Låt ÄG, AL vara tvänne rätvinkliga parallelepipe-der, som hafva samma bas AC; det skall bevisas, att

AG:AL = AE:AK. Bevis. Vi antage först, att höjderna AE, AK äro commensurabla, att t. ex.

3.AE = 7.AK, eller att AE innehåller sju gånger samma mått, som AK. innehåller 3 gånger. Om man då indelar AE och AK efter detta mått, och genom delningspunkterna drager plan parallela med basen AC; så blifver derigenom ÄG deladt uti 7, och AL uti 3 parallelepi-peder, som alla måste vara lika stora (22 prop, 11. Cor.). Alltså innehåller ÄG 7 gånger samma mått, som AL innehåller 3 gånger, eller 3.AG^=7.AL. Emedan således 3.AG-7AL och ...... 3AE = 7.AK;

så måste. . . . AG:AL ~ AE:AK, enl. förklariri gen till 3:dje def. 5; h. s. b.

Antagom nu, att AE och AK äro incommensurabla; och att ÄG har till AL samma förhål

Proposition. Theorem.

Hvar och en parallelepiped är lilla stor med en rätvinklig parallelepiped, som med honom har lilt a stor bas och höjd.

H

Bevis. Om ett af den gifna parallelepipedens si~ doplan, HIMB, är rectangel; så kan man genom sidorna Hl, IM, MB, BH föreställa sig plan vara dragna vinkelräta mot planet BI, somformeraenrätvinkligparallelepipedHEFIMBA, hvilken vore lika stor med den gifna parallelepi-peden, emedan HIMB vore deras gemensamma bas, och deras höjder lika stora.

Men om HIMB icke är en rectangel; så drag ML, BO vinkelräta mot Hl, och genom dessa räta lineer planen BD, MG vinkelräta mot planet MM; så uppkommer deraf en rätvinklig parallelepiped, ODCLMBA, som är lika stor med HEF1MBA, emedan de hafva samma bas AB, och samma höjd»

På detta sätt kan hvar och en gifven parallelepiped förändras till en med honom lika stor parallelepiped, som har tvänne sidoplan vinkelräta mot basernas plan; och sedan denna nja paral-lelepiped förändras till en med honom lika stor rätvinklig parallelepiped; h, s. b.

Elfte Boken. 267

Proposition.

Rätvinkliga parallelepipeder, som hafva samma bas, förhålla sig till hvarandra, som deras höjder.

Låt ÄG, AL vara tvänne rätvinkliga parallelepipe-der, som hafva samma bas AC; det skall bevisas, att

AG:AL = AE:AK. Bevis. Vi antage först, att höjderna AE, AK äro commensurabla, att t. ex.

3.AE = 7.AK, eller att AE innehåller sju gånger samma mått, som AK. innehåller 3 gånger. Om man då indelar AE och AK efter detta mått, och genom delningspunkterna drager plan parallela med basen AC; så blifver derigenom ÄG deladt uti 7, och AL uti 3 parallelepi-peder, som alla måste vara lika stora (22 prop, 11. Cor.). Alltså innehåller ÄG 7 gånger samma mått, som AL innehåller 3 gånger, eller 3.AG^=7.AL. Emedan således

3.AG-7AL och ...... 3AE = 7.AK;

så måste. . . . AG:AL ~ AE:AK, enl. förklariri gen till 3:dje def. 5; h. s. b.

Antagom nu, att AE och AK äro incommensurabla; och att ÄG har till AL samma förhål

lande, som AE har till en rät linea, som är större än AK; att t. e.

AGrAL = AE:AM.

Dela då AE uti lika stora delar, som hvardera äro mindre än KM? så måste åtminstone en del-ningspunkt infalla mellan K och M, såsom N ; och hvar och en af dessa delar är ett gemensamt mått för AE, och AN, som således äro commensu-surabla. Föreställer man sig nu, att genom punkten N ett plan drages parallelt med basen AC; så uppkomme derigenom en rätvinklig parallel-epiped CN, hvars höjd AN vore commensurabel med AE; och då måste, enligt hvad förut iden-nå prop. är bevisadt,

CN:AG = AN:AE, och då enl. hypothésen . . . AG:AL = AE:AM; så måste . , . CN:AL = AN: AM, . . 22 prop. 5.

Men nu är AN < AM, då CN > AL, hvilket är omöjligt; alltså kan ej

AG:AL = AE:AM;

och på samma sätt bevises, att icke ÄG förhåller sig till AL, som AE till någon annan rät linea, vare sig större eller mindre, än AK; alltså måste åG:AL = AE:AK; h. s. b.

Proposition. Tlieoreuf.

Rätvinkliga par allele pipeder , som hafva höjd, förhålla sig till hvarandra* som deras baser.

Bevis. Ty om man ställer de båda rätvinkliga parallelepipederna AG? KB bredvid hvarandra; så

E

att den förres sidoplan HF sammanfaller med den sednares sidoplan HM, och utdrager planet EG till N och I; så uppkomma derigenom trenne rätvinkliga parallelepipeder ÄG, KN, KB, af hvilka ÄG och KN hafva samma bas KG, då deras höjder äro EF, FI; samt KN och KB hafva samma bas, då deras höjder äro KF, KM.

Derföre måste AG.KN = EF:(FI = CM), 30 pr. 11.

i, -i ' ArMm- lEF:CM> «« *

hvadan. . . . ^^:K"=JKF'KMv * Pr°P- ö

Men nu har parallelogrammen AF till KC äfvenledes ett sammansatt förhållande af EF.CM och af KF:KM (23 prop. 6.); hvaraf följer, att I = AE:KC, h. s. b.

\XXII Proposition. Theorem.

Rätvinkliga parallelepipeder hafva till hvarandra ett forhällande, $om är sammansatt af deras basers och höjders förhållanden.

Låt P,, p vara tvänne gifna rätvinkliga par allelepipeder; låt B, b vara deras baser, gamt H5 h deras höjder: 268

Elfte Boken.

lande, som AE har till en rät linea, som är större än AK; att t. e.

AGrAL = AE:AM.

Dela då AE uti lika stora delar, som hvardera äro mindre än KM? så måste åtminstone en del-ningspunkt infalla mellan K och M, såsom N ; och hvar och en af dessa delar är ett gemensamt mått för AE, och AN, som således äro commensu-surabla. Föreställer man sig nu, att genom punkten N ett plan drages parallelt med basen AC; så uppkomme derigenom en rätvinklig parallel-epiped CN, hvars höjd AN vore commensurabel med AE; och då måste, enligt hvad förut iden-nå prop. är bevisadt,

CN:AG = AN:AE, och då enl. hypothésen . . . AG:AL = AE:AM; så måste . , . CN:AL = AN: AM, . . 22 prop. 5.

Men nu är AN < AM, då CN > AL, hvilket är omöjligt; alltså kan ej

AG:AL = AE:AM;

och på samma sätt bevises, att icke ÄG förhåller sig till AL, som AE till någon annan rät linea, vare sig större eller mindre, än AK; alltså måste åG:AL = AE:AK; h. s. b.

Proposition. Tlieoreuf.

Rätvinkliga par allele pipeder , som hafva höjd, förhålla sig till hvarandra* som deras baser.

Bevis. Ty om man ställer de båda rätvinkliga parallelepipederna AG? KB bredvid hvarandra; så

E

att den förres sidoplan HF sammanfaller med den sednares sidoplan HM, och utdrager planet EG till N och I; så uppkomma derigenom trenne rätvinkliga parallelepipeder ÄG, KN, KB, af hvilka ÄG och KN hafva samma bas KG, då deras höjder äro EF, FI; samt KN och KB hafva samma bas, då deras höjder äro KF, KM.

Derföre måste AG.KN = EF:(FI = CM), 30 pr. 11.

i, -i ' ArMm- lEF:CM> «« *

hvadan. . . . ^^:K"=JKF'KMv * Pr°P- ö

Men nu har parallelogrammen AF till KC äfvenledes ett sammansatt förhållande af EF.CM och af KF:KM (23 prop. 6.); hvaraf följer, att I = AE:KC, h. s. b.

\XXII Proposition. Theorem.

Rätvinkliga parallelepipeder hafva till hvarandra ett forhällande, $om är sammansatt af deras basers och höjders förhållanden.

Låt P,, p vara tvänne gifna rätvinkliga par allelepipeder; låt B, b vara deras baser, gamt H5 h deras höjder: 268

lande, som AE har till en rät linea, som är större än AK; att t. e.

AGrAL = AE:AM.

Dela då AE uti lika stora delar, som hvardera äro mindre än KM? så måste åtminstone en del-ningspunkt infalla mellan K och M, såsom N ; och hvar och en af dessa delar är ett gemensamt mått för AE, och AN, som således äro commensu-surabla. Föreställer man sig nu, att genom punkten N ett plan drages parallelt med basen AC; så uppkomme derigenom en rätvinklig parallel-epiped CN, hvars höjd AN vore commensurabel med AE; och då måste, enligt hvad förut iden-nå prop. är bevisadt,

CN:AG = AN:AE, och då enl. hypothésen . . . AG:AL = AE:AM; så måste . , . CN:AL = AN: AM, . . 22 prop. 5.

Men nu är AN < AM, då CN > AL, hvilket är omöjligt; alltså kan ej

AG:AL = AE:AM;

och på samma sätt bevises, att icke ÄG förhåller sig till AL, som AE till någon annan rät linea, vare sig större eller mindre, än AK; alltså måste åG:AL = AE:AK; h. s. b.

Proposition. Tlieoreuf.

Rätvinkliga par allele pipeder , som hafva höjd, förhålla sig till hvarandra* som deras baser.

Bevis. Ty om man ställer de båda rätvinkliga parallelepipederna AG? KB bredvid hvarandra; så

E

att den förres sidoplan HF sammanfaller med den sednares sidoplan HM, och utdrager planet EG till N och I; så uppkomma derigenom trenne rätvinkliga parallelepipeder ÄG, KN, KB, af hvilka ÄG och KN hafva samma bas KG, då deras höjder äro EF, FI; samt KN och KB hafva samma bas, då deras höjder äro KF, KM.

Derföre måste AG.KN = EF:(FI = CM), 30 pr. 11.

i, -i ' ArMm- lEF:CM> «« *

hvadan. . . . ^^:K"=JKF'KMv * Pr°P- ö

Men nu har parallelogrammen AF till KC äfvenledes ett sammansatt förhållande af EF.CM och af KF:KM (23 prop. 6.); hvaraf följer, att I = AE:KC, h. s. b.

\XXII Proposition. Theorem.

Rätvinkliga parallelepipeder hafva till hvarandra ett forhällande, $om är sammansatt af deras basers och höjders förhållanden.

Låt P,, p vara tvänne gifna rätvinkliga par allelepipeder; låt B, b vara deras baser, gamt H5 h deras höjder:270

Antag eri tredje rätvinklig parallelepiped /r, som har basen B, och höjden h; så måste P:TE= H:h 30 prop. 11. n : p = B : b 31 prop. 11.

hvadan . . . I^P - ^tri^c 22 prop. 5; h. s. b,

r en

Scholium 1. Om man antager, att p en kubiktum, så är b en qvadrattum, och h tum ; samt

eller

P =; B.H.

Om således storleken af deri rätvinkliga par-allelepipedens bas och höjd äro gifna uti numertal, genom liknämniga qvadrat- och längdemått; så erhålles den rätvinkliga p ar allelepipedens rymd uti producten af hans bas och höjd.

Scholium 2. Om parallelepipeden är en kub, hvars sida är a tum, så är hans bas a2 qvadrattum, och hans rymd a3 kubiktum, hvadan man uti arithmetiken plägar kalla a3 "kuben på a.?;

Om således a utmärker, huru många enheter af den mindre sorten längdemått rymmas uti den större enheten; så utmärker a3, huru många enheter af den mindre sorten rymdemått innehållas uti den större; så att l kub. fot = 1000 kub. tum , l kub. famn = 216 kub fot = 27 kub. al nar; o. s. v.

Theorem.

Rymden af ett prisma är lika stor med producten af dess bas och höjd,

l:o Hvar och en parallelepiped är lika stor med en rätvinklig parallelepiped, som har lika stor bas, och samma höjd; men denna sednare parallelepipedens rymd är lika stor med producten af hans bas och höjd; derföre måste äfven den förres rymd vara lika stor med producten af hans bas och höjd.

2:o Hvart och ett trekantigt prisma är half-parten af en parallelepiped, som har samma höjd, men dubbelt så stor bas; således är rymden af ett trekantigt prisma lika stor med producten af dess höjd och parallelepipedens halfva, d. v. s. det trekantiga prismats hela bas.

3:o Hvart och ett mångkantigt prisma kan delas i lika många trekantiga prismer, som de trianglar äro, uti hvilka man kan dela det mångkantiga prismats bas. Summan af alla dessa trekantiga prismernas rymder är lika stor med det mångkantiga prismats rymd; så att om h är gemensam höjd för det mångkantiga och de trekantiga prismerna, och trianglarne äro t, t', t"; så måste sammanlagda rymden af alla de trekantiga prismerna vara

h.t4h.lf-|--ht"=h(t+t' + t");

men nu är t-f t'-f t" lika med det mångkantiga prismats bas, b; hvadan dess rymd blifver h.b, eller producten af dess höjd och bas.

Corollarium. l:o Prismer, som hafva lika stora höjder, förhålla sig till hvarandra som deras baser.

2:o Prismer, som hafva lika stora baser, förhålla sig till hvarandra, som deras höjder 270

Elfte Boken.

Antag eri tredje rätvinklig parallelepiped /r, som har basen B, och höjden h; så måste P:TE= H:h 30 prop. 11. n : p = B : b 31 prop. 11.

hvadan . . . I^P - ^tri^c 22 prop. 5; h. s. b,

r en

Scholium 1. Om man antager, att p en kubiktum, så är b en qvadrattum, och h tum ; samt

eller

P =; B.H.

Om således storleken af deri rätvinkliga par-allelepipedens bas och höjd äro gifna uti numertal, genom liknämniga qvadrat- och längdemått; så erhålles den rätvinkliga p ar allelepipedens rymd uti producten af hans bas och höjd.

Scholium 2. Om parallelepipeden är en kub, hvars sida är a tum, så är hans bas a2 qvadrattum, och hans rymd a3 kubiktum, hvadan man uti arithmetiken plägar kalla a3 "kuben på a.?;

Om således a utmärker, huru många enheter af den mindre sorten längdemått rymmas uti den större enheten; så utmärker a3, huru många enheter af den mindre sorten rymdemått innehållas uti den större; så att l kub. fot = 1000 kub. tum , l kub. famn = 216 kub fot = 27 kub. al nar; o. s. v.

Theorem.

Rymden af ett prisma är lika stor med producten af dess bas och höjd,

Elfte Boken.

211

l:o Hvar och en parallelepiped är lika stor med en rätvinklig parallelepiped, som har lika stor bas, och samma höjd; men denna sednare parallelepipedens rymd är lika stor med producten af hans bas och höjd; derföre måste äfven den förres rymd vara lika stor med producten af hans bas och höjd.

2:o Hvart och ett trekantigt prisma är half-parten af en parallelepiped, som har samma höjd, men dubbelt så stor bas; således är rymden af ett trekantigt prisma lika stor med producten af dess höjd och parallelepipedens halfva, d. v. s. det trekantiga prismats hela bas.

3:o Hvart och ett mångkantigt prisma kan delas i lika många trekantiga prismer, som de trianglar äro, uti hvilka man kan dela det mångkantiga prismats bas. Summan af alla dessa trekantiga prismernas rymder är lika stor med det mångkantiga prismats rymd; så att om h är gemensam höjd för det mångkantiga och de trekantiga prismerna, och trianglarne äro t, t', t"; så måste sammanlagda rymden af alla de trekantiga prismerna vara

h.t4h.lf-|--ht"=h(t+t' + t");

men nu är t-f t'-f t" lika med det mångkantiga prismats bas, b; hvadan dess rymd blifver h.b, eller producten af dess höjd och bas.

Corollarium. l:o Prismer, som hafva lika stora höjder, förhålla sig till hvarandra som deras baser.

2:o Prismer, som hafva lika stora baser, förhålla sig till hvarandra, som deras höjder272

3:o Prismer hafva till hvarandra ett förhållande, som är sammansatt af deras höjders och basers förhållanden.

Proposition. Theorem.

Om en pyramid AECDE skäres af ett plan parallelt med basen,

l;o så blifva pyramidens sidor och höjd skurna af detta plan i lika förhållande ; så att AB: AF = AC:AK = AD:AH= A E. ÄG = AL:AM.

2; o Afskärningen FKHG skall vara lik-f or mig med basen B C DE*

Bevis l:mo Emedan planen CE och KG äro parallela; så äro deras afskärningar BC, FK, med planet ABC parallela, Derföre måste triang

lame ABC och AFK vara likfor- a. 9 prop. 11. mige,samtsäledesAB:AC-AF:AK, b- 4 Pr°P- 6-b, eller AB:AF = AC AK. På alldeles lika sätt bevisas alla de öfriga analogierna.

2:o Emedan FK är parallel med BC, och FG med BE; så måste vinkeln CBE = KFG,a; och på samma sätt bevises, att alla de a. 12 prop. 11. öfriga vinklarne uti månghörnin- b* 4 Pr°P- 6-gen CE äro lika stora med hvar sin vinkel uti KG. Men nu är äfven

AB: AF = BC:FK och ...... AB:AF~BE:FG, b;

derföre måste . BC:FK = BE:FG; eller BC:BE = FK:FG; och på samma sätt bevises, att sidorna omkring alla de öfriga lika stora vinklarna uti båda manghörningarna äro proportionella; alltså äro dessa månghörningar likformiga; h. s. b,

Co ro 11. 1. Om tvänne pyramider AEDB, och AEDCB, hafva samma spels y ocfi deras baser äro i samma plan, och om de båda blifva skurna af ett och samma plan^ parallelt med basen; sä skola afskärningarna FHG och FKHG förhälla sig till hvarandra såsom baserna BDE och BCDE.

Ty mångh. BCDE.FKHG = BE:FG 20 pr. 6,

och triang. .... BDE:FHG = BE:FG219 pr. 6; alltså måste . . BCDE:FKHG = BDE:FHG; eller . BCDE:BDE = FKHG:FHG 272

Elfte Boken.

3:o Prismer hafva till hvarandra ett förhållande, som är sammansatt af deras höjders och basers förhållanden.

Proposition. Theorem.

Om en pyramid AECDE skäres af ett plan parallelt med basen,

l;o så blifva pyramidens sidor och höjd skurna af detta plan i lika förhållande ; så att AB: AF = AC:AK = AD:AH= A E. ÄG = AL:AM.

2; o Afskärningen FKHG skall vara lik-f or mig med basen B C DE*

Bevis l:mo Emedan planen CE och KG äro parallela; så äro deras afskärningar BC, FK, med planet ABC parallela, Derföre måste triang

lame ABC och AFK vara likfor- a. 9 prop. 11. mige,samtsäledesAB:AC-AF:AK, b- 4 Pr°P- 6-b, eller AB:AF = AC AK. På alldeles lika sätt bevisas alla de öfriga analogierna.

2:o Emedan FK är parallel med BC, och FG med BE; så måste vinkeln CBE = KFG,a; och på samma sätt bevises, att alla de a. 12 prop. 11. öfriga vinklarne uti mânghörnin- b* 4 Pr°P- 6-gen CE äro lika stora med hvar sin vinkel uti KG. Men nu är äfven

AB: AF = BC:FK och ...... AB:AF~BE:FG, b;

derföre måste . BC:FK = BE:FG; eller BC:BE = FK:FG; och på samma sätt bevises, att sidorna omkring alla de öfriga lika stora vinklarna uti båda manghörningarna äro proportionella; alltså äro dessa månghörningar likformiga; h. s. b,

Co ro 11. 1. Om tvänne pyramider AEDB, och AEDCB, hafva samma spels y ocfi deras baser äro i samma plan, och om de båda blifva skurna af ett och samma plan^ parallelt med basen; sä skola afskärningarna FHG och FKHG förhälla sig till hvarandra såsom baserna BDE och BCDE.

Ty mångh. BCDE.FKHG = BE:FG 20 pr. 6,

och triang. .... BDE:FHG = BE:FG219 pr. 6; alltså måste . . BCDE:FKHG = BDE:FHG; eller . BCDE:BDE = FKHG:FHG274

Coroll. 2. Om en pyramid skäres af ett med basen parallelt plan, så blifver den af-skurna pyramiden likformig med den hela , 16 def. 11.

Proposition. Theorem.

Trekantiga pyramider, som hafva lika stora höjder och lika stora baser, äro lika stora.

Låt ABCD,

abcd vara tvänne pyramider, hvilkas lika stora baser, BCD, abd, äro uti samma plan , och hvilkas höjder äro lika stora; det skall bevisas , att dessa pyramider äro lika stora.

Bevis. Ty örn de ej äro lika stora, så låt BR vara båda pyramidernas gemensamma höjd , och på henne BQ vara lika stor med höjden af det prisma, som har triangeln BCD till bas, och som är lika stort med skillnaden imellan pyramiderna; så att pyramiden ABCD är så mycket större lin pyramiden abcd, gom prismat BCDQ.

Dela den gemensamma höjden BR uti lika sto* ra delar, hvardera mindre än BQ, och drag genom delningspunkterna plan, parallela med pyramidernas baser; då afskärningarna, EFG och efg,HKLochhkl, etc., två och två måste blifva lika stora, enl. nästfö-reg. coroll., eftersom baserna BCD = bed. Slutligen uppritar man på

baserna BCD, EFG etc. prismer, hvilkas kanter blifva delarne BE, EH. etc., och som till en del äro utanför den större pyramiden;samt på baserna efg, hkl,etc. prismer, hvilkas kanter blifva de motsvarande delarne be, eh, etc., och som äro helt och hållet inuti den mindre pyramiden. Alla dessa prismer» höjder äro lika stora, och mindre än BQ.

Summan af alla prismerna uti den större pyramiden är större än pyramiden, och summan af alla prismerna uti den mindre pyramiden är mindre än denna pyramid; hvaraf följer, att skillnaden imellan dessa båda summor måste vara större, än skillnaden mellan pyramiderna; d. v. s. större än prismat BCDQ.

Nu är prismat EFGH = efgh, emedan de stå på lika stora baser EGF, egf och hafva samma 274

Coroll. 2. Om en pyramid skäres af ett med basen parallelt plan, så blifver den af-skurna pyramiden likformig med den hela , 16 def. 11.

Proposition. Theorem.

Trekantiga pyramider, som hafva lika stora höjder och lika stora baser, äro lika stora.

Låt ABCD,

abcd vara tvänne pyramider, hvilkas lika stora baser, BCD, abd, äro uti samma plan , och hvilkas höjder äro lika stora; det skall bevisas , att dessa pyramider äro lika stora.

Bevis. Ty örn de ej äro lika stora, så låt BR vara båda pyramidernas gemensamma höjd , och på henne BQ vara lika stor med höjden af det prisma, som har triangeln BCD till bas, och som är lika stort med skillnaden imellan pyramiderna; så att pyramiden ABCD är så mycket större lin pyramiden abcd, gom prismat BCDQ.

Dela den gemensamma höjden BR uti lika sto* ra delar, hvardera mindre än BQ, och drag genom delningspunkterna plan, parallela med pyramidernas baser; då afskärningarna, EFG och efg,HKLochhkl, etc., två och två måste blifva lika stora, enl. nästfö-reg. coroll., eftersom baserna BCD = bed. Slutligen uppritar man på baserna BCD, EFG etc. prismer, hvilkas kanter blifva delarne BE, EH. etc., och som till en del äro utanför den större pyramiden;samt på baserna efg, hkl,etc. prismer, hvilkas kanter blifva de motsvarande delarne be, eh, etc., och som äro helt och hållet inuti den mindre pyramiden. Alla dessa prismer» höjder äro lika stora, och mindre än BQ.

Summan af alla prismerna uti den större pyramiden är större än pyramiden, och summan af alla prismerna uti den mindre pyramiden är mindre än denna pyramid; hvaraf följer, att skillnaden imellan dessa båda summor måste vara större, än skillnaden mellan pyramiderna; d. v. s. större än prismat BCDQ.

Nu är prismat EFGH = efgh, emedan de stå på lika stora baser EGF, egf och hafva samma276

höjd; prismat HKLM = hkle af samma orsak, o. s. v. så att hvart och ett prisma uti den stor-re pyramiden har sitt motsvarande uti den mindre pyramiden, med hvilket det är lika stort; med undantag af prismat BCDE. Detta prisma BCDE utgör således skillnaden imellan prismer-nas summor i båda pyramiderna; hvaraf följer, att prismat BCDE måste vara större än prismat BCDQ, som är skillnaden imellan pyramiderna.

Men prismerna BCDE och BCPQ hafva samma bas, och det förra mindre höjd; emedan vi antagit, att delarne af BR äro mindre än BQ; således måste BCDE < BCDQ; och alltså BCDE på samma gång större och mindre än BCDQ, hvilket är orimligt. Således kunna ej de båda pyramiderna ABCD, abcd vara olika stora.

Proposition. Theorem.

Hvar och en trekantig pyramid är tredjedelen of ett trekantigt prisma, som har samma bas och samma höjd som pyramiden.

Låt ABCD vara den trekantige pyramiden, och AEFBCD ett trekantigt prisma, som har samma höjd och samma bas BCD; och afskär från prismat först pyramiden AFED, genom planet ADF; så återstår den fyrkantige pyramiden DAFBC. Denne sednare pyramid kan skäras midtitu genom planet D AB; emedan pyramiderna D ABC och DAFB hafva lika stora baser ABC och AFB, a,

£

och sam- a. 34 pr. 1. ma höjd, b- 35 Pr- n-nämligen en rät linea från D vinkelrät mot planet FC, b.

Men nu kan man till pyramiderna DAFB och AFED anse de lika stora trianglarna DFB och DFE vara baser, då deras gemensamma höjd blifver en rät linea från A vinkelrät mot planet BE; hvadan äfven dessa tvänne pyramider äro lika stora, b.

Då alltså alla tre pyramiderna äro lika stora, så måste en af dem, t. ex. ABCD vara en tredjedel af deras summa; d. v. s. af trekantiga prismat AEFBCD.

Corollarium. Rymden af en trekantig pyramid är lika stor med tredjedelen af producten af hans bas och höjd.

Proposition. Theorem.

Rymden af en pyramid är lika stor med tredjedelen af producten af hans bas och höjd.

Ty uti en mångkantig pyramid kan basen delas i trianglar, och den mångkantiga pyramiden delas i trekantiga pyramider, som hafva dessa trianglar till baser och gemensam höjd med den mångkantiga pyramiden. Men enl. nästföreg. coroll. är rymden af hvar och en bland dessa tre- 276

höjd; prismat HKLM = hkle af samma orsak, o. s. v. så att hvart och ett prisma uti den stor-re pyramiden har sitt motsvarande uti den mindre pyramiden, med hvilket det är lika stort; med undantag af prismat BCDE. Detta prisma BCDE utgör således skillnaden imellan prismer-nas summor i båda pyramiderna; hvaraf följer, att prismat BCDE måste vara större än prismat BCDQ, som är skillnaden imellan pyramiderna.

Men prismerna BCDE och BCPQ hafva samma bas, och det förra mindre höjd; emedan vi antagit, att delarne af BR äro mindre än BQ; således måste BCDE < BCDQ; och alltså BCDE på samma gång större och mindre än BCDQ, hvilket är orimligt. Således kunna ej de båda pyramiderna ABCD, abcd vara olika stora.

Proposition. Theorem.

Hvar och en trekantig pyramid är tredjedelen of ett trekantigt prisma, som har samma bas och samma höjd som pyramiden.

Låt ABCD vara den trekantige pyramiden, och AEFBCD ett trekantigt prisma, som har samma höjd och samma bas BCD; och afskär från prismat först pyramiden AFED, genom planet ADF; så återstår den fyrkantige pyramiden DAFBC. Denne sednare pyramid kan skäras midtitu genom planet D AB; emedan pyramiderna D ABC och DAFB hafva lika stora baser ABC och AFB, a,

Elfte Boken.

271

£

och sam- a. 34 pr. 1. ma höjd, b- 35 Pr- n-nämligen en rät linea från D vinkelrät mot planet FC, b.

Men nu kan man till pyramiderna DAFB och AFED anse de lika stora trianglarna DFB och DFE vara baser, då deras gemensamma höjd blifver en rät linea från A vinkelrät mot planet BE; hvadan äfven dessa tvänne pyramider äro lika stora, b.

Då alltså alla tre pyramiderna äro lika stora, så måste en af dem, t. ex. ABCD vara en tredjedel af deras summa; d. v. s. af trekantiga prismat AEFBCD.

Corollarium. Rymden af en trekantig pyramid är lika stor med tredjedelen af producten af hans bas och höjd.

Proposition. Theorem.

Rymden af en pyramid är lika stor med tredjedelen af producten af hans bas och höjd.

Ty uti en mångkantig pyramid kan basen delas i trianglar, och den mångkantiga pyramiden delas i trekantiga pyramider, som hafva dessa trianglar till baser och gemensam höjd med den mångkantiga pyramiden. Men enl. nästföreg. coroll. är rymden af hvar och en bland dessa tre- 276

höjd; prismat HKLM = hkle af samma orsak, o. s. v. så att hvart och ett prisma uti den stor-re pyramiden har sitt motsvarande uti den mindre pyramiden, med hvilket det är lika stort; med undantag af prismat BCDE. Detta prisma BCDE utgör således skillnaden imellan prismer-nas summor i båda pyramiderna; hvaraf följer, att prismat BCDE måste vara större än prismat BCDQ, som är skillnaden imellan pyramiderna.

Men prismerna BCDE och BCPQ hafva samma bas, och det förra mindre höjd; emedan vi antagit, att delarne af BR äro mindre än BQ; således måste BCDE < BCDQ; och alltså BCDE på samma gång större och mindre än BCDQ, hvilket är orimligt. Således kunna ej de båda pyramiderna ABCD, abcd vara olika stora.

Proposition. Theorem.

Hvar och en trekantig pyramid är tredjedelen of ett trekantigt prisma, som har samma bas och samma höjd som pyramiden.

Låt ABCD vara den trekantige pyramiden, och AEFBCD ett trekantigt prisma, som har samma höjd och samma bas BCD; och afskär från prismat först pyramiden AFED, genom planet ADF; så återstår den fyrkantige pyramiden DAFBC. Denne sednare pyramid kan skäras midtitu genom planet D AB; emedan pyramiderna D ABC och DAFB hafva lika stora baser ABC och AFB, a,

£

och sam- a. 34 pr. 1. ma höjd, b- 35 Pr- n-nämligen en rät linea från D vinkelrät mot planet FC, b.

Men nu kan man till pyramiderna DAFB och AFED anse de lika stora trianglarna DFB och DFE vara baser, då deras gemensamma höjd blifver en rät linea från A vinkelrät mot planet BE; hvadan äfven dessa tvänne pyramider äro lika stora, b.

Då alltså alla tre pyramiderna äro lika stora, så måste en af dem, t. ex. ABCD vara en tredjedel af deras summa; d. v. s. af trekantiga prismat AEFBCD.

Corollarium. Rymden af en trekantig pyramid är lika stor med tredjedelen af producten af hans bas och höjd.

Proposition. Theorem.

Rymden af en pyramid är lika stor med tredjedelen af producten af hans bas och höjd.

Ty uti en mångkantig pyramid kan basen delas i trianglar, och den mångkantiga pyramiden delas i trekantiga pyramider, som hafva dessa trianglar till baser och gemensam höjd med den mångkantiga pyramiden. Men enl. nästföreg. coroll. är rymden af hvar och en bland dessa tre-2*8

kantiga pyramider lika stor med tredjedelen af producten af hans bas och höjd; derföre måste alla dessa trekantiga pyramider tillsammantagne, d. v. s, hela den mångkantiga pyramidens rymd, vara lika stor med tredjedelen af producten af alla trianglarna tillhopa, d. v. s. af mångkantiga pyramidens bas, och den gemensamma höjden; h, s. b.

C oroll. 1. Hvar och en pyramid är tredjedelen af ett prisma, som har samma bas och samma höjd, som pyramiden.

C o ro 11. 2. Emedan således Pyramiderne förhålla sig som prismerna; så måste:

Pyramider af lika höjd f or hälla sig till hvarandra, som deras baser;

Pyramider på samma bas förhålla sig till hvarandra, som deras höjder.

Pyramider hafva till hvarandra ett sammansatt förhållande af det^ som deras baser och höjder hafva till hvarandra.

1OLXWHI Proposition. Theorem.

Rymden af en afstympad pyramid y ABCHKL, hvars större bas ABC-a, hvars mindre bas HKL =6, och hvars höjdEF~hf är lika stor med

± (a + VaUb + b).

Elfte Boken.

H

K

F

G Bevis. Ty om man

fullbordar hela pyramiden, så måste GF:GE (- GC:GL)

= CB:LK; emedan trianglarne GCF och GLE, samt trianglarne GCB och GLK ä-ro likformige. Men

figurerne ABC, HKL äro äfven likformige (34

prop, 11. cor. 2); derföre måste

BC*:LK*= fig. ABC: fig. HKL = a : b; och således äfven GF: GE = a: b

samt.......GF:GE=: Va: 1/1); så att, om

man kallar GE = x, då GF = h + x; blifver

h + x:x = V~a: V"b,

d. v. s.

h. l/b , , , h. Va

x =---------- och h -f x =-

1/7-V1T

VT-Vi

Nu är således den större pyramidens GABC rymd

h a. v a sn*» .** \

«' v^ (3r prop> ll-}

och den mindre pyramidens G H K L rymd

h b. l/b"

1/7-Vi

kantiga pyramider lika stor med tredjedelen af producten af hans bas och höjd; derföre måste alla dessa trekantiga pyramider tillsammantagne, d. v. s, hela den mångkantiga pyramidens rymd, vara lika stor med tredjedelen af producten af alla trianglarna tillhopa, d. v. s. af mångkantiga pyramidens bas, och den gemensamma höjden; h, s. b.

C oroll. 1. Hvar och en pyramid är tredjedelen af ett prisma, som har samma bas och samma höjd, som pyramiden.

C o ro 11. 2. Emedan således Pyramiderne förhålla sig som prismerna; så måste:

Pyramider af lika höjd f or hälla sig till hvarandra, som deras baser;

Pyramider på samma bas förhålla sig till hvarandra, som deras höjder.

Pyramider hafva till hvarandra ett sammansatt förhållande af det^ som deras baser och höjder hafva till hvarandra.

1OLXWHI Proposition. Theorem.

Rymden af en afstympad pyramid y ABCHKL, hvars större bas ABC-a, hvars mindre bas HKL =6, och hvars höjdEF~hf är lika stor med

± (a + VaUb + b).

H

K

F

G Bevis. Ty om man

fullbordar hela pyramiden, så måste GF:GE (- GC:GL)

= CB:LK; emedan trianglarne GCF och GLE, samt trianglarne GCB och GLK ä-ro likformige. Men

figurerne ABC, HKL äro äfven likformige (34

prop, 11. cor. 2); derföre måste

BC*:LK*= fig. ABC: fig. HKL = a : b; och således äfven GF: GE = a: b

samt.......GF:GE=: Va: 1/1); så att, om

man kallar GE = x, då GF = h + x; blifver

h + x:x = V~a: V"b,

d. v. s.

h. l/b , , , h. Va

x =---------- och h -f x =-

1/7-V1T

VT-Vi

Nu är således den större pyramidens GABC rymd

h a. v a sn*» .** \

«' v^ (3r prop> ll-}

och den mindre pyramidens G H K L rymd

h b. l/b"

1/7-Vi

hvarföre deras skillnad, eller rymden af den af stympade pyramiden ABCHKL måste vara

h a. 1/7 U. 1) . y~*_ _ _h . a 1/7" b VjT

3 i/T- l/T

Va-Vb 8 V a-V b

h.

XX.XOL Proposition. Theorem*

Rymden af ett snedt a f skur et trekantigt prisma ABCDEF, hvars öfra bas ABC ej är parallel med basen DEP, är lika stor med triangeln DEF, hvars plan ctr draget vinkelrätt mot prismats sidor, multiplicerad med tredjedelen af sidornas AT), BE, CF summa

Bevis. Drag FG vinkelrät mot DE.

Planet DGF är då vin-C kelrätt mot planet BD, emedan solida figuren HKCD är ett vinkelrätt prisma; och emedan FG är vinkelrät mot dessa båda plans afskärning DG, så måste FG vara vinkelrät mot planet BD, och lika stor med en rät linea, som från C drages vinkelrätt emot samma plan, emedan lineen CF är parallel med planet BD.

Drager man nu genom C ett plan CKH parallelt med DEF; så blifver FG lika stor med höjden till den fyrkantiga pyramiden CBAHK

G

Basen till denna pyramid är trapezium ABKH, hvars parallela sidor AH~ AD-CF, BK = BE^

CF, och dessas vinkelräta afstånd är HK == DE.

Låt nu AD~*a, BE==b, CF2zc,DE~m,

= n; så blifver arean af irapeziu.m ABKH

a 4- b - 2c

OT, AH + BK

HK. -------------I=L m.

(planimetri probl. 3

2 2

och pyramidens CBAHK rymd

m. n n-f b-2c. ~_~* £-

Men rymden af det vinkelräta prismat CHKDEF är

CF. DEF =

2

c ;

hvadan det snedt afskurna prismat, som är dessa båda qvantiteters summa, måste till sin rymd vara

m.n^ »4- b 4-c

T" - 3 ;

m.n a -f b-2c m.n. T". " 2 ~2~

c .-,

h. s. b.

IIj Proposition* iTIteorein»

Uti likformiga trekantiga pyramidetf äro de solida vinklarne lika stora,

Ty om pyramiderna ABCD, EFGH äro lik-formige, så äro de plana vinklarne BAC = FEG, BAD = FEH, CAD =

19*

hvarföre deras skillnad, eller rymden af den af stympade pyramiden ABCHKL måste vara

h a. 1/7 U. 1) . y~*_ _ _h . a 1/7" b VjT

3 i/T- l/T

Va-Vb 8 V a-V b

h.

XX.XOL Proposition. Theorem*

Rymden af ett snedt a f skur et trekantigt prisma ABCDEF, hvars öfra bas ABC ej är parallel med basen DEP, är lika stor med triangeln DEF, hvars plan ctr draget vinkelrätt mot prismats sidor, multiplicerad med tredjedelen af sidornas AT), BE, CF summa

Bevis. Drag FG vinkelrät mot DE.

Planet DGF är då vin-C kelrätt mot planet BD, emedan solida figuren HKCD är ett vinkelrätt prisma; och emedan FG är vinkelrät mot dessa båda plans afskärning DG, så måste FG vara vinkelrät mot planet BD, och lika stor med en rät linea, som från C drages vinkelrätt emot samma plan, emedan lineen CF är parallel med planet BD.

Drager man nu genom C ett plan CKH parallelt med DEF; så blifver FG lika stor med höjden till den fyrkantiga pyramiden CBAHK

G

Basen till denna pyramid är trapezium ABKH, hvars parallela sidor AH~ AD-CF, BK = BE^

CF, och dessas vinkelräta afstånd är HK == DE.

Låt nu AD~*a, BE==b, CF2zc,DE~m,

= n; så blifver arean af irapeziu.m ABKH

a 4- b - 2c

OT, AH + BK

HK. -------------I=L m.

(planimetri probl. 3

2 2

och pyramidens CBAHK rymd

m. n n-f b-2c. ~_~* £-

Men rymden af det vinkelräta prismat CHKDEF är

CF. DEF =

2

c ;

hvadan det snedt afskurna prismat, som är dessa båda qvantiteters summa, måste till sin rymd vara

m.n^ »4- b 4-c

T" - 3 ;

m.n a -f b-2c m.n. T". " 2 ~2~

c .-,

h. s. b.

IIj Proposition* iTIteorein»

Uti likformiga trekantiga pyramidetf äro de solida vinklarne lika stora,

Ty om pyramiderna ABCD, EFGH äro lik-formige, så äro de plana vinklarne BAC = FEG, BAD = FEH, CAD =

hvarföre deras skillnad, eller rymden af den af stympade pyramiden ABCHKL måste vara

h a. 1/7 U. 1) . y~*_ _ _h . a 1/7" b VjT

3 i/T- l/T

Va-Vb 8 V a-V b

h.

XX.XOL Proposition. Theorem*

Rymden af ett snedt a f skur et trekantigt prisma ABCDEF, hvars öfra bas ABC ej är parallel med basen DEP, är

lika stor med triangeln DEF, hvars plan ctr draget vinkelrätt mot prismats sidor, multiplicerad med tredjedelen af sidornas AT), BE, CF summa

Bevis. Drag FG vinkelrät mot DE.

Planet DGF är då vin-C kelrätt mot planet BD, emedan solida figuren HKCD är ett vinkelrätt prisma; och emedan FG är vinkelrät mot dessa båda plans afskärning DG, så måste FG vara vinkelrät mot planet BD, och lika stor med en rät linea, som från C drages vinkelrätt emot samma plan, emedan lineen CF är parallel med planet BD.

Drager man nu genom C ett plan CKH parallelt med DEF; så blifver FG lika stor med höjden till den fyrkantiga pyramiden CBAHK

G

Basen till denna pyramid är trapezium ABKH, hvars parallela sidor AH~ AD-CF, BK = BE^

CF, och dessas vinkelräta afstånd är HK == DE.

Låt nu AD~*a, BE==b, CF2zc,DE~m,

= n; så blifver arean af irapeziu.m ABKH

a 4- b - 2c

OT, AH + BK

HK. -------------I=L m.

(planimetri probl. 3

2 2

och pyramidens CBAHK rymd

m. n n-f b-2c. ~_~* £-

Men rymden af det vinkelräta prismat CHKDEF är

CF. DEF =

2

c ;

hvadan det snedt afskurna prismat, som är dessa båda qvantiteters summa, måste till sin rymd vara

m.n^ »4- b 4-c

T" - 3 ;

m.n a -f b-2c m.n. T". " 2 ~2~

c .-,

h. s. b.

IIj Proposition* iTIteorein»

Uti likformiga trekantiga pyramidetf äro de solida vinklarne lika stora,

Ty om pyramiderna ABCD, EFGH äro lik-formige, så äro de plana vinklarne BAC = FEG, BAD = FEH, CAD =

11., och alltså är den solida vinkeln A lika stor med E, 20 prop. 11.

På samma sätt bevises, att solida vinkeln B = F C = G och D =: H.

Lemma*

Uti tvänne solida vinklar, som hvardera omfattas af tre plana vinklar, af hvilka två och två äro lika stora,

BAC = bac, BÅD = bad, CAD = cad, hafva kanterne lika lutningar mot de lika stora vinklarnes plan.

Om CE drages vinkelrät mot planet BAD, och ce vinkelrät mot planet bad; så skall det bevisas, att vinkeln CAE = cae, a.

c Bevis. Ty om man

tager AC = ac, drager EB vinkelrät mot AB, och

a. 4 def. 11. eb vinkelrät mot ab; så måste

b. 15 prop. 11. planet BCE vara vinkelrätt emot

d 26 ProP< V* Planet BAD> b* Emedan således e 20 prop 11. ^^ ut* ^et ena af dessa båda plan, f. 47 prop. 1. är dragen vinkelrät mot deras af-skärningslinea BE; så måste AB vara vinkelrät mot planet BCE, c; alltså är vinkeln ABC rät.

rät

På samma sätt bevises, att vinkeln abc ar

Då således vinkeln ABC = abc, BAC = bac, och AC = ac; så måste BC= be, d. Vinkeln CBE = cbe, emedan dessa båda vinklar äro lutningar-ne imellan lika stora vinklars plan, e; vinklarne vid E, e, äro räta: uti de båda rätvinkliga trianglarna, BCE, bce, måste derföre sidan CE = ce; d.

Nu äro således uti de båda rätvinkliga trianglarna CAE, cae, CE = ce och AC = ac> hvadan vinkeln CAE = cae, lu s, b.

IM Proposition. Theorem.

Uti likformiga pyramider förhålla sig höjderna till hvarandra, som pyramidernas, homologa sidor;

d, v. s. GF:gf=GB:gb=:BC:bc, o, s. v.

Bevis. Ty då Pyramiderne äro likformige, måste^de tre plana vinklarne vid B vara lika stora med hvar sin vinkel vid b; och således vinkeln GBF = gbf enl. föregående Lemma. Då nu äfven vinklarne vid F och f äro lika stora; så måste trianglarne GBF, gbf vara likformige, och således

GF:gf=GB:gb = BC:bc? o, s, v.rh i, b.

282

Elfte Boken.

11., och alltså är den solida vinkeln A lika stor med E, 20 prop. 11.

På samma sätt bevises, att solida vinkeln B = F C = G och D =: H.

Lemma*

Uti tvänne solida vinklar, som hvardera omfattas af tre plana vinklar, af hvilka två och två äro lika stora,

BAC = bac, BÅD = bad, CAD = cad, hafva kanterne lika lutningar mot de lika stora vinklarnes plan.

Om CE drages vinkelrät mot planet BAD, och ce vinkelrät mot planet bad; så skall det bevisas, att vinkeln CAE = cae, a.

c Bevis. Ty om man

tager AC = ac, drager EB vinkelrät mot AB, och

a. 4 def. 11. eb vinkelrät mot ab; så måste

b. 15 prop. 11. planet BCE vara vinkelrätt emot

d 26 ProP< V* Planet BAD> b* Emedan således e 20 prop 11. ^^ ut* ^et ena af dessa båda plan, f. 47 prop. 1. är dragen vinkelrät mot deras af-skärningslinea BE; så måste AB vara vinkelrät mot planet BCE, c; alltså är vinkeln ABC rät.

rät

På samma sätt bevises, att vinkeln abc ar

Då således vinkeln ABC = abc, BAC = bac, och AC = ac; så måste BC= be, d. Vinkeln CBE = cbe, emedan dessa båda vinklar äro lutningar-ne imellan lika stora vinklars plan, e; vinklarne vid E, e, äro räta: uti de båda rätvinkliga trianglarna, BCE, bce, måste derföre sidan CE = ce; d.

Nu äro således uti de båda rätvinkliga trianglarna CAE, cae, CE = ce och AC = ac> hvadan vinkeln CAE = cae, lu s, b.

IM Proposition. Theorem.

Uti likformiga pyramider förhålla sig höjderna till hvarandra, som pyramidernas, homologa sidor;

d, v. s. GF:gf=GB:gb=:BC:bc, o, s. v.

Bevis. Ty då Pyramiderne äro likformige, måste^de tre plana vinklarne vid B vara lika stora med hvar sin vinkel vid b; och således vinkeln GBF = gbf enl. föregående Lemma. Då nu äfven vinklarne vid F och f äro lika stora; så måste trianglarne GBF, gbf vara likformige, och således

GF:gf=GB:gb = BC:bc? o, s, v.rh i, b.

Theorem.

Likformige pyramider hafva till hvarandra ett tripliceradt förhållande af det, som deras homologa lineer haf va till hvarandra.

Bevis, Låt den ena pyramiden, hans bas och höjd vara

P, B, H;

den andra pyramiden, hans bas och höjd vara p, b, h;

samt S , s vara tvänne homologa sidor uti pyrami dernas baser; så måste

1Ij C0r' 2' Men emedan pyramiderna äro likformiga, gå måste

H : h = S : s, 41 prop. 11. och ... H2:h2==S2:s*==.B:b, 20 prop. 6. samt alltså

(H2 -h2; F : I> = ' = H3 : h* = S* : s»vh. s. b.

IlLIII Proposition.

Likformiga prismer hafva i il l hvarandra ett tripliceradt förhållande af dtt , som deras homologa lineer hafva till hvarandra,

På alldeles lika sätt, som uti 41 prop., be-vires, att uti likformiga prismer äro höjderna proportionella med prismernas homologa sidor; hvarefter, likasom uti 42 propositionen, bevises, att likformiga prismer hafva till hvarandra ett tripli

ceradt förhållande af det, »om dera& homologa lineer hafva till hvarandra.

IUV Proposition. Theorem.

Likformige polyedrar., uti hvilka de solida vinklar, som omfattas af likformiga plan, äro congruenta, hafva till hvarandra ett lri~ pliceradt forhållande af det, som dera$ homo-lo

Bevis. Låt D,K vara tvänne congruent* vinklar, som omfattas af de plana vinklarne ADC ^ FKH, CDE = HKL, och för Öfrigt af huru många andra plana vinklar som heldst; låt plan blifva dragna genom spetsarna A, C, E, och F, H, L, samt genom A, D, E, och F, K, L, hvarigenom pyra-miderne DACE, KFHL blifva afskurne: det skall först bevisas, att dessa pyramider äro likformige,

Emedan de solida vinklarne vid K och J> äro congruenta; så måste pyramiden K kunna stal las uti pyramiden D, så att speisarne K och 13 sammanfalla, och sidan KH faller utefter DC< KF utefter BÄ, samt HL utefter DE,,

Theorem.

Likformige pyramider hafva till hvarandra ett tripliceradt förhållande af det, som deras homologa lineer haf va till hvarandra.

Bevis, Låt den ena pyramiden, hans bas och höjd vara

P, B, H;

den andra pyramiden, hans bas och höjd vara p, b, h;

samt S , s vara tvänne homologa sidor uti pyrami dernas baser; så måste

1Ij C0r' 2' Men emedan pyramiderna äro likformiga, gå måste

H : h = S : s, 41 prop. 11. och ... H2:h2==S2:s*==.B:b, 20 prop. 6. samt alltså

(H2 -h2; F : I> = ' = H3 : h* = S* : s»vh. s. b.

IlLIII Proposition.

Likformiga prismer hafva i il l hvarandra ett tripliceradt förhållande af dtt , som deras homologa lineer hafva till hvarandra,

På alldeles lika sätt, som uti 41 prop., be-vires, att uti likformiga prismer äro höjderna proportionella med prismernas homologa sidor; hvarefter, likasom uti 42 propositionen, bevises, att likformiga prismer hafva till hvarandra ett tripli

Elfte Boken.

285

ceradt förhållande af det, »om dera& homologa lineer hafva till hvarandra.

IUV Proposition. Theorem.

Likformige polyedrar., uti hvilka de solida vinklar, som omfattas af likformiga plan, äro congruenta, hafva till hvarandra ett lri~ pliceradt forhållande af det, som dera$ homo-lo

Bevis. Låt D,K vara tvänne congruent* vinklar, som omfattas af de plana vinklarne ADC ^ FKH, CDE = HKL, och för Öfrigt af huru många andra plana vinklar som heldst; låt plan blifva dragna genom spetsarna A, C, E, och F, H, L, samt genom A, D, E, och F, K, L, hvarigenom pyra-miderne DACE, KFHL blifva afskurne: det skall först bevisas, att dessa pyramider äro likformige,

Emedan de solida vinklarne vid K och J> äro congruenta; så måste pyramiden K kunna stal las uti pyramiden D, så att speisarne K och 13 sammanfalla, och sidan KH faller utefter DC< KF utefter BÄ, samt HL utefter DE,,

Theorem.

Likformige pyramider hafva till hvarandra ett tripliceradt förhållande af det, som deras homologa lineer haf va till hvarandra.

Bevis, Låt den ena pyramiden, hans bas och höjd vara

P, B, H;

den andra pyramiden, hans bas och höjd vara p, b, h;

samt S , s vara tvänne homologa sidor uti pyrami dernas baser; så måste

1Ij C0r' 2' Men emedan pyramiderna äro likformiga, gå måste

H : h = S : s, 41 prop. 11. och ... H2:h2==S2:s*==.B:b, 20 prop. 6. samt alltså

(H2 -h2; F : I> = ' = H3 : h* = S* : s»vh. s. b.

IlLIII Proposition.

Likformiga prismer hafva i il l hvarandra ett tripliceradt förhållande af dtt , som deras homologa lineer hafva till hvarandra,

På alldeles lika sätt, som uti 41 prop., be-vires, att uti likformiga prismer äro höjderna proportionella med prismernas homologa sidor; hvarefter, likasom uti 42 propositionen, bevises, att likformiga prismer hafva till hvarandra ett tripli

ceradt förhållande af det, »om dera& homologa lineer hafva till hvarandra.

IUV Proposition. Theorem.

Likformige polyedrar., uti hvilka de solida vinklar, som omfattas af likformiga plan, äro congruenta, hafva till hvarandra ett lri~ pliceradt forhållande af det, som dera$ homo-lo

Bevis. Låt D,K vara tvänne congruent* vinklar, som omfattas af de plana vinklarne ADC ^ FKH, CDE = HKL, och för Öfrigt af huru många andra plana vinklar som heldst; låt plan blifva dragna genom spetsarna A, C, E, och F, H, L, samt genom A, D, E, och F, K, L, hvarigenom pyra-miderne DACE, KFHL blifva afskurne: det skall först bevisas, att dessa pyramider äro likformige,

Emedan de solida vinklarne vid K och J> äro congruenta; så måste pyramiden K kunna stal las uti pyramiden D, så att speisarne K och 13 sammanfalla, och sidan KH faller utefter DC< KF utefter BÄ, samt HL utefter DE,,

Emedan polyedrarne äro likformige, så måste de sålunda utefter hvarandra fallande sidorna vara proportionella; hvaraf åter följer, att FH blifver parallel med AC, och FL med AE, a;

a. 2 prop. 6. samt således planet FHL paral-

b. 12 prop. 11. Ielt med piariet ACE) b) och pjr_

c S* f0°rP*2 ramiden DACE likformig med pyramiden KFHL, c.

På detta sätt kunna polyedrarne delas uti lika många trekantiga pyramider, af hvilka två och två äro likformige.

Låt den ene polyedern vara R, och hans pyramider vara P, P', P", etc.; låt den andre polyedern vara r, och hans pyramider vara p, p', p", etc. ; så måste P : p = P : p' = P":p" . . .

^ 42 prop. 11; och således

P + P + P". . : p + p'+ p" . . = ÄC FH,

d, v. s. R : r = ÄC PH, h. s. b.

Definition.

Regulier polyeder kallas den, som inne-slutes af reguliera, likformiga och lika stora plana figurer.

l:o Låt ABC vara en liksidig triangel, och på hans sidor liksidiga trianglar vara uppritade: viker man dessa trenne sista trianglar utefter deras sidor, så att punkterna D, E, F

D

B

sammanfalla; så uppkommer en Tetraeder, d. v. s. en solid figur, som inneslutes of fyra lika stora liksidiga trianglar.

2:o Låt af åtta lika stora liksidiga trianglar ett nät vara formeradt, såsom figuren utvisar, och låt dessa trianglar blifva vikna utefter deras sidor så, att punkten C sammanfaller med G, D med H, E med K, och F med L; så formeras deraf en Octae-der9 d. v. s. en solid fi-

gur, som inneslutes af 8 lika stora liksidiga

* * t

trianglar.

3:o Låt 20 lika stora liksidiga trianglar formera nätet AM; viker man dessa trianglar utefter deras sidor så, att punkterna A, B, C, D, E sammanfalla i en punkt, och punkterna G, H, K, L, M, i en annan punkt; så formeras deraf en Icosaéder, d. v. s. en solid figur, som inneslutes af 20 lika stora liksidiga trianglar. 286

Emedan polyedrarne äro likformige, så måste de sålunda utefter hvarandra fallande sidorna vara proportionella; hvaraf åter följer, att FH blifver parallel med AC, och FL med AE, a;

a. 2 prop. 6. samt således planet FHL paral-

b. 12 prop. 11. Ielt med piariet ACE) b) och pjr_

c S* f0°rP*2 ramiden DACE likformig med pyramiden KFHL, c.

På detta sätt kunna polyedrarne delas uti lika många trekantiga pyramider, af hvilka två och två äro likformige.

Låt den ene polyedern vara R, och hans pyramider vara P, P', P", etc.; låt den andre polyedern vara r, och hans

pyramider vara p, p', p'', etc. ; så måste P : p = P : p' = P'':p'' . . .

^ 42 prop. 11; och således

P + P + P''. . : p + p'+ p'' . . = ÄC FH,

d, v. s. R : r = ÄC PH, h. s. b.

Definition.

Regulier polyeder kallas den, som inne-slutes af reguliera, likformiga och lika stora plana figurer.

l:o Låt ABC vara en liksidig triangel, och på hans sidor liksidiga trianglar vara uppritade: viker man dessa trenne sista trianglar utefter deras sidor, så att punkterna D, E, F

D

B

sammanfalla; så uppkommer en Tetraeder, d. v. s. en solid figur, som inneslutes of fyra lika stora liksidiga trianglar.

2:o Låt af åtta lika stora liksidiga trianglar ett nät vara formeradt, såsom figuren utvisar, och låt dessa trianglar blifva vikna utefter deras sidor så, att punkten C sammanfaller med G, D med H, E med K, och F med L; så formeras deraf en Octae-der9 d. v. s. en solid fi-

gur, som inneslutes af 8 lika stora liksidiga

* * t

trianglar.

3:o Låt 20 lika stora liksidiga trianglar formera nätet AM; viker man dessa trianglar utefter deras sidor så, att punkterna A, B, C, D, E sammanfalla i en punkt, och punkterna G, H, K, L, M, i en annan punkt; så formeras deraf en Icosaéder, d. v. s. en solid figur, som inneslutes af 20 lika stora liksidiga trianglar.288

F

4:o Figuren EFGH är nätet till en Cub, hvars formerande af de sex lika stora qvadraterna är tydligt.

5:o Låt AB vara en regulier femhörning, och på dess sidor reguliera femhörningar vara uppritade; låt de yttre figurerna AC, BD, etc. vara vikna så, att de få två och två sidor gemensamma: construerar man derjemte af 6 andra med dessa lika stora reguliera femhörningar en dylik figur, samt ställer dem tillsammans så, att den enes utgående vinklar inpassas uti den andres ingående vinklar; så formeras deraf en Dodecaeder, d. v. s. en solid figur, som inneslutes af 12 lika stora reguliera femhörningar.

Emedan alla de plana vinklar, som skola kunna omfatta en solid vinkel, måste tillsammantagne vara mindre än fyra räta; så kunna, af liksidiga trianglar ej flera än fem ställas med sina spetsar tillsamman, för att formera en solid vinkel, såsom uti Icosaedern. Af qvadrater, eller femhörningar kunna ej flera än tre ställas med sina spetsar tillsamman, for att formera en solid vinkel; såsom uti Cuben och Dodecaedern;

men af endast likvinkliga sex-, sju-, åttahörningars vinklar kan ej någon solid vinkel omfattas.

Det finnes således endast fem reguliera polyedrar.

TOLFTE BOKEN.

Definitioner.

1. Cylinder är solid figur, som uppkommer genom en rectangels AE hvälfning omkring sin ena orörliga sida AB.

Emedan AF och BE under denna rörelse förblifva vinkelräta mot AB; så beskrifva de cirklar, FKL, EQP, som äro lika stora och kallas cylindrens baser. Sidan FE beskrifver cylindrens buktiga, eller convexa yta,

På samma sätt beskrifver hvar och en rät linea DG, som är vinkelrät mot AB, äfven en cirkel, under rectangelns hvälfning.

Lineen AB, som under hvälfningen är orörlig, kallas cylindrens axel eller höjd, och FE cylindrens sida.

4:o Figuren EFGH är nätet till en Cub, hvars formerande af de sex lika stora qvadraterna är tydligt.

5:o Låt AB vara en regulier femhörning, och på dess sidor reguliera femhörningar vara uppritade; låt de yttre figurerna AC, BD, etc. vara vikna så, att de få två och två sidor gemensamma: construerar man derjemte af 6 andra med dessa lika stora reguliera femhörningar en dylik figur, samt ställer dem tillsammans så, att den enes utgående vinklar inpassas uti den andres ingående vinklar; så formeras deraf en Dodecaeder, d. v. s. en solid figur, som inneslutes af 12 lika stora reguliera femhörningar.

Emedan alla de plana vinklar, som skola kunna omfatta en solid vinkel, måste tillsammantagne vara mindre än fyra räta; så kunna, af liksidiga trianglar ej flera än fem ställas med sina spetsar tillsamman, för att formera en solid vinkel, såsom uti Icosaedern. Af qvadrater, eller femhörningar kunna ej flera än tre ställas med sina spetsar tillsamman, for att formera en solid vinkel; såsom uti Cuben och Dodecaedern;

men af endast likvinkliga sex-, sju-, åttahörningars vinklar kan ej någon solid vinkel omfattas.

Det finnes således endast fem reguliera polyedrar.

TOLFTE BOKEN.

Definitioner.

1. Cylinder är solid figur, som uppkommer genom en rectangels AE hvälfning omkring sin ena orörliga sida AB.

Emedan AF och BE under denna rörelse förblifva vinkelräta mot AB; så beskrifva de cirklar, FKL, EQP, som äro lika stora och kallas cylindrens baser. Sidan FE beskrifver cylindrens buktiga, eller convexa yta,

På samma sätt beskrifver hvar och en rät linea DG, som är vinkelrät mot AB, äfven en cirkel, under rectangelns hvälfning.

Lineen AB, som under hvälfningen är orörlig, kallas cylindrens axel eller höjd, och FE cylindrens sida.

Om cylindren skares af plan, som äro vinkelräta mot axeln AB, så blifva afskärningarna LF, MG, NH, PE parallela och lika stora cirklar.

Om en cylinder skares af ett plan genom axeln, så blifver afskärningen en rectangel. A

2. Con är en solid figur, som uppkommer genom en rätvinklig triangels AEB hvälfning omkring orörliga sidan AE.

Sidan EB beskrifver cirkeln BCD, som kallas conens bas; sidan AD beskrifver conens buktiga yta; den orörliga lineen AE kallas conens axel, eller höjd, och AB conens sida, Punkt. A conens topp.

Om conen skäres af ett plan, parallelt med basen, så blifver afskärningen en cirkel GHK. Går det skärande planet genom conens axel AE, så blifvar afskärningen en triangel, congruent med ABD.

Om man från en con tager bort en con AGHK, genom ett plan, parallelt med basen; så kallas den återstående solida figuren GHKBCD afstympad con.

3. Sphaer är en solid figur, innesluten af en buktig yta, hvilkens alla punkter äro på lika afstånd från en gifven punkt inuti figuren. Denna punkt kallas sphaerens medelpunkt.

K

Sphaeren kan anses uppkomma derigenom, att en halfcirkel AEB hvälfver sig omkring sin diameter ABJ

Hvilken diameter, AB, gom heldst uti sphaeren, kallas sphaerens axel; axelns ändpunkter poler. En cirkel, FNG, som går genom sphaerens medelpunkt, och hvars plan är vinkelrätt mot axeln, kallas AEqvator. Hvar och en med aeqvatorn parallel cirkel, KL, HI, kallas parallel. Hvar och en cirkel genom båda polerna, såsom AEB, kallas meridian.

4. Sphaerisk Zon är den del af en sphaers buktiga yta, som inneslutes imellan tvänne parallela plan; såsom KFGL; om det ena planet tangerar sphaeren, kallas ytan calotte, såsom KAL.

5. Sphaeriskt Segment är den del af en sphaer, som inneslutes af tvänne parallela plan och af en zon. Det ena af dessa plan kan tangera sphaeren, då segmentet endast inneslutes af ett plan och af en calotte.

6. Sphaerisk Sector är en solid figur, som inneslutes af en calotte och en conisk yta, som har sin topp i sphaerens medelpunkt.

I Proposition. Theorem.

Rymden af en Cylinder är lika med producten af hans bas och höjd, 290

Tolfte Boken.

Om cylindren skares af plan, som äro vinkelräta mot axeln AB, så blifva afskärningarna LF, MG, NH, PE parallela och lika stora cirklar.

Om en cylinder skares af ett plan genom axeln, så blifver afskärningen en rectangel. A

2. Con är en solid figur, som uppkommer genom en rätvinklig triangels AEB hvälfning omkring orörliga sidan AE.

Sidan EB beskrifver cirkeln BCD, som kallas conens bas; sidan AD beskrifver conens buktiga yta; den orörliga lineen AE kallas conens axel, eller höjd, och AB conens sida, Punkt. A conens topp.

Om conen skäres af ett plan, parallelt med basen, så blifver afskärningen en cirkel GHK. Går det skärande planet genom conens axel AE, så blifvar afskärningen en triangel, congruent med ABD.

Om man från en con tager bort en con AGHK, genom ett plan, parallelt med basen; så kallas den återstående solida figuren GHKBCD afstympad con.

3. Sphaer är en solid figur, innesluten af en buktig yta, hvilkens alla punkter äro på lika afstånd från en gifven

punkt inuti figuren. Denna punkt kallas sphaerens medelpunkt.

K

Sphaeren kan anses uppkomma derigenom, att en halfcirkel AEB hvälfver sig omkring sin diameter ABJ

Hvilken diameter, AB, gom heldst uti sphaeren, kallas sphaerens axel; axelns ändpunkter poler. En cirkel, FNG, som går genom sphaerens medelpunkt, och hvars plan är vinkelrätt mot axeln, kallas AEqvator. Hvar och en med aeqvatorn parallel cirkel, KL, HI, kallas parallel. Hvar och en cirkel genom båda polerna, såsom AEB, kallas meridian.

4. Sphaerisk Zon är den del af en sphaers buktiga yta, som inneslutes imellan tvänne parallela plan; såsom KFGL; om det ena planet tangerar sphaeren, kallas ytan calotte, såsom KAL.

5. Sphaeriskt Segment är den del af en sphaer, som inneslutes af tvänne parallela plan och af en zon. Det ena af dessa plan kan tangera sphaeren, då segmentet endast inneslutes af ett plan och af en calotte.

6. Sphaerisk Sector är en solid figur, som inneslutes af en calotte och en conisk yta, som har sin topp i sphaerens medelpunkt.

I Proposition. Theorem.

Rymden af en Cylinder är lika med producten af hans bas och höjd,292

således

Låt cylindrens bas vara n B, hans höjd H, och hans rymd K; det skall bevisas, att

$K = BH$.

Bevis. Antagom, att ett prisma vore inskrifvet uti cylindern, såsom DEFA; hvars höjd är H. Detta prismas bas, nämligen månghörningen DEF etc. måste vara mindre, än cylindrens bas, eller cirkeln, hvaruti han är inskrifven; och sjelfva prismat mindre än cylindren. Låt b vara prismats bas, och k dess rymd, samt

$B = b + b'$, och $K = k + k'$, eller, , $b = B - b'$, och $k = K+k'$; så måste

$k = (B-b'). H$ ... 33 prop. 11. eller . . . $K - k' = BH-b'H$;

och.....$K = BH - b'H + k'$; ehuru mångkantigt prismat k än må vara.

Men nu äro qvantiteterna b' och k' olika, allteftersom prismerna äro mer eller mindre mångkantiga; så att dessa qvantiteter äro mindre för prismat DGEHFA, än för prismat DEFA; och således skulle storleken af K, d. v. s. af en gifven cylinder, blifva olika, allteftersom man uti honom behagade inskrifva ett mer eller mindre mångkantigt prisma, hvilket är omöjligt,

Då likväl eqvationen

$K = B.H - b' . H + k'$

skall gälla för alla möjliga uti cylindren inskrifna prismer, är detta ej annorlunda möjligt, än att

$- b/H + k' = o$; hvadan . . $K-B.H$, h. s. b

Scholium, Emedan basen är en cirkel, så måste B = ;rR2, om man antager cirkelns radie att vara R; således är pi R2 . H cubikinnehållet af en cylinder, hvars radie är R och hvars höjd är H.

II Proposition. Theorem

Buktiga ytan of en cylinder är lika med basens peripheri multiplicerad med cylinderns höjd.

Bevis. Låt ett prisma ABEF vara omskrifvet omkring cylindern; så måste omkretsen af prismats bas vara större än cirkelns peripheri, och prismats convexa yta, d. v. s. alla rectanglarne AB, AF etc. tillsammans, vara större än cylindrens buktiga yta.

Kallar man då omkretsen af cylindrens bas p, af prismats bas P, cylindrens och prismats gemensamma höjd h, cylindrens buktiga yta a. och prismats convexa yta A; samt

A. - a =± a', eller A ~ a -f a och . . . P-p = p, eller P^p4-p; så måste. A = P. h ~ (p 4- p), h, d. v. s.

a-f a' = ph -fp'h eller . a = p. h. + p'h ~ a'; uti hvilken eqva-

således

Låt cylindrens bas vara n B, hans höjd H, och hans rymd K; det skall bevisas, att

K = BH.

Bevis. Antagom, att ett prisma vore inskrifvet uti cylindern, såsom DEFA; hvars höjd är H. Detta prismas bas, nämligen månghörningen DEF etc. måste vara mindre, än cylindrens bas, eller cirkeln, hvaruti han är inskrifven; och sjelfva prismat mindre än cylindren. Låt b vara prismats bas, och k dess rymd, samt

B = b + b', och K = k + k', eller, , b = B - b', och k = K+k'; så måste

k = (B-b'). H ... 33 prop. 11. eller . . . K - k' = BH-b'H;

och.....K = BH - b'H + k' ; ehuru mångkantigt prismat k än må vara.

Men nu äro qvantiteterna b' och k' olika, allteftersom prismerna äro mer eller mindre mångkantiga; så att dessa qvantiteter äro mindre för prismat DGEHFA, än för prismat DEFA; och således skulle storleken af K, d. v. s. af en gifven cylinder, blifva olika, allteftersom man uti honom behagade inskrifva ett mer eller mindre mångkantigt prisma, hvilket är omöjligt,

Då likväl eqvationen

K = B.H - b' . H + k'

skall gälla för alla möjliga uti cylindren inskrifna prismer, är detta ej annorlunda möjligt, än att

- b/H + k' = o; hvadan . . K-B.H, h. s. b

Scholium, Emedan basen är en cirkel, så måste B = ;rR2, om man antager cirkelns radie att vara R; således är pi R2 . H cubikinnehållet af en cylinder, hvars radie är R och hvars höjd är H.

II Proposition. Theorem

Buktiga ytan of en cylinder är lika med basens peripheri multiplicerad med cylinderns höjd.

Bevis. Låt ett prisma ABEF vara omskrifvet omkring cylindern; så måste omkretsen af prismats bas vara större än cirkelns peripheri, och prismats convexa yta, d. v. s. alla rectanglarne AB, AF etc. tillsammans, vara större än cylindrens buktiga yta.

Kallar man då omkretsen af cylindrens bas p, af prismats bas P, cylindrens och prismats gemensamma höjd h, cylindrens buktiga yta a. och prismats convexa yta A; samt

A. - a =± a', eller A ~ a -f a och . . . P-p = p, eller P^p4-p; så måste. A = P. h ~ (p 4- p), h, d. v. s.

a-f a' = ph -fp'h eller . a = p. h. + p'h ~ a'; uti hvilken eqva-

r

tion man genom en alldeles lika slutledning, som

uti nästföreg. prop* bevisar, att p'h - a = o, hvadan

a = p.h. h. s, b.

Scholium. Om radien i cylindrens bas är R, så är hans peripheri 2/zR, och således cylindrens buktiga yta a n 2/ih.R.

III Propo^

lO^hLijjfi.

Theorem*

Rymden af en con ar lika med conens bas, multiplicerad med en tredjedel af hans höjd,

Om conens höjd AC r= H, arean af hans bas BDEF = B, och hans rymd = K; så bevises genom inskrifning af en pyramid uti conen, på lika sätt som uti prop. l, att

Scholium. Om radien uti conens bas är R; så är basens area /iR2, och således K - f/iH.R2

IV Proposition»' Theorem.

Buktiga ytan af ej^ con är lika med peripherien af conens *bas multiplicerad med conens halfva sida.

Bevis, Om en pyramid om-skrifves omkring conen; så blifver conens sida AB lika stor med höjden till alla de lik benta trianglar ACD,ADE, etc., som utgöra pyramidens convexa yta; så att denna yta måste vara lika stor med jAB. (CD + DE + etc.).

Låt conens sida AB ..--_-s, peripherien af dess bas vara p, och buktiga ytan vara a; låt omkretsen, CD -f- DE 4- etc., af pyramidens bas vara P, och hans convexa yta vara A; låt vidare skillnaden imellan omkretsarna af conens och pyramidens baser vara p', och skillnaden imellan deras convexa ytor vara a'; så måste A r.^ a -f- ti P - p -f p

och . . A -|s.P, eller a -f a = J s , (p * p'); d. v. s. a "_.-: p.p -f l s.p .- a .

Men, som qvantitet rnå p, a' blifva olika, allteftersom den omskrifne pyramiden är mer eller mindre mångkantig; hvaremot en gifven cons buktiga yta ej kan blifva större eller mindre derigenom, att nian omkring conen behagar omskrifva en mer eller mindre mångkantig pyramid; så måste uti uttrycket af värdet af a, is.p -a' = o

för alla möjliga omskrifna pyramider; hvaraf föl jer, att a :.-- |s,p; h, *, b r

294

Tolfte Boken,

tion man genom en alldeles lika slutledning, som

uti nästföreg. prop* bevisar, att p'h - a = o, hvadan

a = p.h. h. s, b.

Scholium. Om radien i cylindrens bas är R, så är hans peripheri 2/zR, och således cylindrens buktiga yta a n 2/ih.R.

III Propo^

lO^hLijjfi.

Theorem*

Rymden af en con ar lika med conens bas, multiplicerad med en tredjedel af hans höjd,

Om conens höjd AC r= H, arean af hans bas BDEF = B, och hans rymd = K; så bevises genom inskrifning af en pyramid uti conen, på lika sätt som uti prop. l, att

Scholium. Om radien uti conens bas är R; så är basens area /iR2, och således K - f/iH.R2

IV Proposition»' Theorem.

Buktiga ytan af ej^ con är lika med peripherien af conens *bas multiplicerad med conens halfva sida.

Tolfte Boken.

295

Bevis, Om en pyramid om-skrifves omkring conen; så blifver conens sida AB lika stor med höjden till alla de lik benta trianglar ACD,ADE, etc., som utgöra pyramidens convexa yta; så att denna yta måste vara lika stor med jAB. (CD + DE + etc.).

Låt conens sida AB ..--_-s, peripherien af dess bas vara p, och buktiga ytan vara a; låt omkretsen, CD -f- DE 4- etc., af pyramidens bas vara P, och hans convexa yta vara A; låt vidare skillnaden imellan omkretsarna af conens och pyramidens baser vara p', och skillnaden imellan deras convexa ytor vara a'; så måste A r.^ a -f- ti P - p -f p

och . . A -|s.P, eller a -f a = J s , (p * p'); d. v. s. a "_.-: p.p -f l s.p .- a .

Men, som qvantitet rnå p, a' blifva olika, allteftersom den omskrifne pyramiden är mer eller mindre mångkantig; hvaremot en gifven cons buktiga yta ej kan blifva större eller mindre derigenom, att nian omkring conen behagar omskrifva en mer eller mindre mångkantig pyramid; så måste uti uttrycket af värdet af a, is.p -a' = o

för alla möjliga omskrifna pyramider; hvaraf föl jer, att a :.-- |s,p; h, *, b r

294

Tolfte Boken,

tion man genom en alldeles lika slutledning, som

uti nästföreg. prop* bevisar, att p'h - a = o, hvadan

a = p.h. h. s, b.

Scholium. Om radien i cylindrens bas är R, så är hans peripheri 2/zR, och således cylindrens buktiga yta a n 2/ih.R.

III Propo^

lO^hLijjfi.

Theorem*

Rymden af en con ar lika med conens bas, multiplicerad med en tredjedel af hans höjd,

Om conens höjd AC r= H, arean af hans bas BDEF = B, och hans rymd = K; så bevises genom inskrifning af en pyramid uti conen, på lika sätt som uti prop. l, att

Scholium. Om radien uti conens bas är R; så är basens area /iR2, och således K - f/iH.R2

IV Proposition»' Theorem.

Buktiga ytan af ej^ con är lika med peripherien af conens *bas multiplicerad med conens halfva sida.

Tolfte Boken.

Bevis, Om en pyramid om-skrifves omkring conen; så blifver conens sida AB lika stor med höjden till alla de lik benta trianglar ACD,ADE, etc., som utgöra pyramidens convexa yta; så att denna yta måste vara lika stor med jAB. (CD + DE + etc.).

Låt conens sida AB ..--_-s, peripherien af dess bas vara p, och buktiga ytan vara a; låt omkretsen, CD -f- DE 4- etc., af pyramidens bas vara P, och hans convexa yta vara A; låt vidare skillnaden imellan omkretsarna af conens och pyramidens baser vara p', och skillnaden imellan deras convexa ytor vara a'; så måste A r.^ a -f- ti P - p -f p

och . . A -|s.P, eller a -f a = J s , (p * p'); d. v. s. a "_.-: p.p -f l s.p .- a .

Men, som qvantitet rnå p, a' blifva olika, allteftersom den omskrifne pyramiden är mer eller mindre mångkantig; hvaremot en gifven cons buktiga yta ej kan blifva större eller mindre derigenom, att nian omkring conen behagar omskrifva en mer eller mindre mångkantig pyramid; så måste uti uttrycket af värdet af a, is.p -a' = o

för alla möjliga omskrifna pyramider; hvaraf föl jer, att a :.-- |s,p; h, *, b296

Scholium. Om radien uti conens bas ärR; iå är peripherien p - 2/iR; och således a = TiR.s.

l Proposition. Theorem.

Rymden af en afstympad con, uti hvilken den större basens radie DF~R.den mindre basens radie lig - r, och höjden gF ~ h, är lika med

Bevis. Emedan Bg är par allel med DF; så måste DF : FA = Bg : gA ; så att, om gA~x, blifver R : h + x =2 r : x,

E och således x = A£ = ^->

0 R-F

AT- l, . Rh

samt . AF =h4 x ~-- *

Hr

Alltså är hela conen ADE lika med

f TI - . R2 . - . . 3 prop. 12.

R~r

r.h

och conen ABC~£7r~*r, Jti-r

samt deras skillnad, eller den afstympade conen BDEC, lika stor med

h.R5 j h.r3 __ i R3 -r^

= |/ih(R2+ R.r + r2); h, s, b,

Proposition. Theorem.

Buktiga ytan af en afstympad con, hvars sida, BD = s, är lika wed n.s. (R + r).

Detta theorem bevises på lika sätt, som det nästföregående, om man antager AB r: x.

¥11 Proposition. Theorem.

Om en sphcer skäres af ett plan, så är afskärningen en cirkel; och medelpunkten till denna cirkel är den punkt, i hvilken en rät linea, som är dragen från sphcerens medelpunkt vinkelrätt mot cirkelns plan, träffar detta plan.

Om planet FG skar sphaeren ABMN, hvars medelpunkt är C, och om CK drages vinkelrätt mot planet FG och träffar detsamma uti K, så skall det bevisas, att FPGEH är en cirkel, hvars medelpunkt är K. Bevis. Ty om man föreställer sig radier uti sphaeren dragna till tvänne punkter H och E af omkretsen FPGEH, så måste dessa båda radier vara lika stora, d. v. s. räta lineen CH = CE; och således är CH = CE, men

296

Tolfte Boken.

Scholium. Om radien uti conens bas ärR; iå är peripherien p - 2/iR; och således a = TiR.s.

l Proposition. Theorem.

Rymden af en afstympad con, uti hvilken den större basens radie DF~R.den mindre basens radie lig - r, och höjden gF ~ h, är lika med

Bevis. Emedan Bg är par allel med DF; så måste DF : FA = Bg : gA ; så att, om gA~x, blifver R : h + x =2 r : x,

E och således x = A£ = ^->

0 R-F

AT- l, . Rh

samt . AF =h4 x ~-- *

Hr

Alltså är hela conen ADE lika med

f TI - . R2 . - . . 3 prop. 12.

R~r

r.h

och conen ABC~£7r~*r, Jti-r

samt deras skillnad, eller den afstympade conen BDEC, lika stor med

h.R5 j h.r3 __ i R3 -r^

= |/ih(R2+ R.r + r2); h, s, b,

Tolfte Boken. 297

Proposition. Theorem.

Buktiga ytan af en afstympad con, hvars sida, BD = s, är lika wed n.s. (R + r).

Detta theorem bevises på lika sätt, som det nästföregående, om man antager AB r: x.

¥11 Proposition. Theorem.

Om en sphcer skäres af ett plan, så är afskärningen en cirkel; och medelpunkten till denna cirkel är den punkt, i hvilken en rät linea, som är dragen från sphcerens medelpunkt vinkelrätt mot cirkelns plan, träffar detta plan.

Om planet FG skar sphaeren ABMN, hvars medelpunkt är C, och om CK drages vinkelrätt mot planet FG och träffar detsamma uti K, så skall det bevisas, att FPGEH är en cirkel, hvars medelpunkt är K. Bevis. Ty om man föreställer sig radier uti sphaeren dragna till tvänne punkter H och E af omkretsen FPGEH, så måste dessa båda radier vara lika stora, d. v. s. räta lineen CH = CE; och således är CH = CE, men

296

Tolfte Boken.

Scholium. Om radien uti conens bas ärR; iå är peripherien p - 2/iR; och således a = TiR.s.

l Proposition. Theorem.

Rymden af en afstympad con, uti hvilken den större basens radie DF~R.den mindre basens radie lig - r, och höjden gF ~ h, är lika med

Bevis. Emedan Bg är par allel med DF; så måste DF : FA = Bg : gA ; så att, om gA~x, blifver R : h + x =2 r : x,

E och således x = A£ = ^->

0 R-F

AT- l, . Rh

samt . AF =h4 x ~-- *

Hr

Alltså är hela conen ADE lika med

f TI - . R2 . - . . 3 prop. 12.

R~r

r.h

och conen ABC~£7r~*r, Jti-r

samt deras skillnad, eller den afstympade conen BDEC, lika stor med

h.R5 j h.r3 __ i R3 -r^

= |/ih(R2+ R.r + r2); h, s, b,

Proposition. Theorem.

Buktiga ytan af en afstympad con, hvars sida, BD = s, är lika wed n.s. (R + r).

Detta theorem bevises på lika sätt, som det nästföregående, om man antager AB r: x.

¥11 Proposition. Theorem.

Om en sphcer skäres af ett plan, så är afskärningen en cirkel; och medelpunkten till denna cirkel är den punkt, i hvilken en rät linea, som är dragen från sphcerens medelpunkt vinkelrätt mot cirkelns plan, träffar detta plan.

Om planet FG skar sphaeren ABMN, hvars medelpunkt är C, och om CK drages vinkelrätt mot planet FG och träffar detsamma uti K, så skall det bevisas, att FPGEH är en cirkel, hvars medelpunkt är K. Bevis. Ty om man föreställer sig radier uti sphaeren dragna till tvänne punkter H och E af omkretsen FPGEH, så måste dessa båda radier vara lika stora, d. v. s. räta lineen CH = CE; och således är CH = CE, men

Scholium. Om radien uti conens bas ärR; iå är peripherien p - 2/iR; och således a = TiR.s.

l Proposition. Theorem.

Rymden af en afstympad con, uti hvilken den större basens radie DF~R.den mindre basens radie lig - r, och höjden gF ~ h, är lika med

Bevis. Emedan Bg är par allel med DF; så måste DF : FA = Bg : gA ; så att, om gA~x, blifver R : h + x =2 r : x,

E och således x = A£ = ^->

0 R-F

AT- l, . Rh

samt . AF =h4 x ~--- *

Hr

Alltså är hela conen ADE lika med

f TI - . R2 . - . . 3 prop. 12.

R~r

r.h

och conen ABC~£7r~*r, Jti-r

samt deras skillnad, eller den afstympade conen BDEC, lika stor med

h.R5 j h.r3 __ i R3 -r^

= |/ih(R2+ R.r + r2); h, s, b,

Proposition. Theorem.

Buktiga ytan af en afstympad con, hvars sida, BD = s, är lika wed n.s. (R + r).

Detta theorem bevises på lika sätt, som det nästföregående, om man antager AB r: x.

¥11 Proposition. Theorem.

Om en sphcer skäres af ett plan, så är afskärningen en cirkel; och medelpunkten till denna cirkel är den punkt, i hvilken en rät linea, som är dragen från sphcerens medelpunkt vinkelrätt mot cirkelns plan, träffar detta plan.

Om planet FG skar sphaeren ABMN, hvars medelpunkt är C, och om CK drages vinkelrätt mot planet FG och träffar detsamma uti K, så skall det bevisas, att FPGEH är en cirkel, hvars medelpunkt är K. Bevis. Ty om man föreställer sig radier uti sphaeren dragna till tvänne punkter H och E af omkretsen FPGEH, så måste dessa båda radier vara lika stora, d. v. s. räta lineen CH = CE; och således är CH = CE, men

CH-"CK4KH .... 47 prop. l

och

a Utsa måste

-OLVKSf=="CK KH = KE.

På .samma sätt bevises, att alla räta lineer; c-om dragas från K till omkretsen FPGEH äro lika stora; alltså är denna omkrets en cirkelperipheri., L vars medelpunkt K; h. s. b.

Corollarium I. Emedan CH, som står emot den räta vinkeln CKH.ar större an KH3 uti triangeln CKH ; så måste cirkeln ADM vara större än FMEG. På samma sätt bevises, att hvilken annan cirkel som heldst, som går genom sphaerens medelpunkt, och hvars radie är sphaerens radie, är t- 1 Orre än den, som ej går genom sphaerens medelpunkt, men hvars peripheri är på ^pha^reiie yta,

/,'/?, ctrliel , som gar genom- sphaerens mc-

f/^//'u,.-,Vf , kallas derföre SiorctrlicL

Corollarium 2. Alla storcirklar på samma rpliKM- äro lika stora, och skära hvarandra

midtitu,

Corollarium 3. Hvar och en storcirkel skär sphaeren uti tvänne lika stora delar , som kallas hewivphcerer.

C o r o 1 1 a r i u m 4. En mindre cirkels och §plia?ivns medelpunkter äro alltid på en rät linea, ^o.ni ;H vinkelrät mot den mindre cirkelns plan,

T

Tolfte Boken.

299

Corollarium 5. Genom tvänne punktet på en sphaer kan alltid en storcirkel peripheri uppritas, hvars plan bestämmes af dessa tvänne punkter och af sphaerens medelpunkt.

WIII Proposition* Theorem.

Ytan af en sphcer ctr lika med fyra gån-ger dess storcirkel, d. v. s. om sphaerens yta är a, och hennes radie K; skall det bevisas, att

S R E

Bevis. Om man omkring en halfcirkel, hvars diameter är QR och medelpunkt F, omskrifvet- en regulier mångörning, med ett jämnt antal sidor; och örn man antager, alt halfcirkelns peripheri hvälfver sig ett hvarf omkring QR för att beskrifva sphaerens yta; så har under denna hvälfning månghörningens sidor AB, BC, . . , beskrifvit coniska ytor: det skall först bevisas, att summan af dessa coniska ytor är lika stor med SSnQF.AE.

Drag radierna FN, FL till tangeringspunk-terna, sa blifva AN = BN; BL=LC9- drag BG3 2»H

Tolfte Boken.

CH-"CK4KH .... 47 prop. l

och

a Utsa måste

-OLVKSf=="CK KH = KE.

På .samma sätt bevises, att alla räta lineer; c-om dragas från K till omkretsen FPGEH äro lika stora; alltså är denna omkrets en cirkelperipheri., L vars medelpunkt K; h. s. b.

Corollarium I. Emedan CH, som står emot den räta vinkeln CKH.ar större an KH3 uti triangeln CKH ; så måste cirkeln ADM vara större än FMEG. På samma sätt bevises, att hvilken annan cirkel som heldst, som går genom sphaerens medelpunkt, och hvars radie är sphaerens radie, är t- 1 Orre än den, som ej går genom sphaerens medelpunkt, men hvars peripheri är på ^pha^reiie yta,

/,'/?, ctrliel , som gar genom- sphaerens mc-

f/^//'u,.-,Vf , kallas derföre SiorctrlicL

Corollarium 2. Alla storcirklar på samma rpliKM- äro lika stora, och skära hvarandra

midtitu,

Corollarium 3. Hvar och en storcirkel skär sphaeren uti tvänne lika stora delar , som kallas hewivphcerer.

C o r o 1 1 a r i u m 4. En mindre cirkels och §plia?ivns medelpunkter äro alltid på en rät linea, ^o.ni ;H vinkelrät mot den mindre cirkelns plan,

T

Tolfte Boken.

Corollarium 5. Genom tvänne punktet på en sphaer kan alltid en storcirkel peripheri uppritas, hvars plan bestämmes af dessa tvänne punkter och af sphaerens medelpunkt.

WIII Proposition* Theorem.

Ytan af en sphcer ctr lika med fyra gån-ger dess storcirkel, d. v. s. om sphaerens yta är a, och hennes radie K; skall det bevisas, att

S R E

Bevis. Om man omkring en halfcirkel, hvars diameter är QR och medelpunkt F, omskrifvet- en regulier månghörning, med ett jämnt antal sidor; och örn man antager, alt halfcirkelns peripheri hvälfver sig ett hvarf omkring QR för att beskrifva sphaerens yta; så har under denna hvälfning månghörningens sidor AB, BC, . . , beskrifvit coniska ytor: det skall först bevisas, att summan af dessa coniska ytor är lika stor med SSnQF.AE.

Drag radierna FN, FL till tangeringspunk-terna, sa blifva AN = BN; BL=LC9- drag BG3300

LH, CF vinkelräta mot AE, och LP, BM parallela med AE.

Vinkeln A är gemensam för trianglarna NAF, GAB? och vinkeln G~N; derföre måste

AN:NF = AG:GB

och således AN. GB = (4 AB .GB) = NF . ÄG ; samt . 7iGB.AB~27ilSF.AG. Men nu är buktiga ytan af den con, som AB un der månghörningens hvälfning beskrifver, lika stor med /tGB.AB, prop. 4; således är denna co-niska vta äfven lika stor med 2/iNF.AG.

Vinkeln CLP = (CBM) = FLH ; emedan hvardera tillhopa med PLF gör en rät. Derföre äro uti trianglarna CBM, FLH,

BC:(BM = GF) = LF:IIL och således BC.HL = LF. GF;

1JT FC -f GB , o, , men HL - - - - , och således måste

och emedan buktiga ytan af den afstympade con, som BC beskrifver, är lika stor med 7z.BC.(FC 4 GB); så måste denna yta vara lika stor med

Enär det sålunda är bevist, och kan bevisas. att de coniska ytorna, som beskrifvas af AB är lika stor med ÄTiNF.AG af BC 27iNF.GF

af CD 2/ilNF.FS

af DE . . . . . . 2/iNF.SE; så måste hela

convexa ytan , som månghörningens sidor beskrifva ? vara lika stor med

eller, om man kallar sphaerens radie R, och AE = 2R 4- r', blifver hela denna convexa yta lika stor med

Kallar man nu sphaerens yta a, och skillnaden imellan sphaerens yta och den yta, som månghörningens sidor beskrifva^ a'; så måste

a = 2;*R(2R f r) -a' = 47iR2 -f 2/iRr'-a/.

Men, likasom uti föreg, propositioner, bevises äfven här, att 2/iRr' - a = o, hvadan sluteligen a - 4/zR2, h. s. b.

Corollarium 1. Buktiga ytan af en Zon ar lika stor med storcirkelns peripheri multiplicerad med zonens höjd; så att om sphaerens radie är R, och zonens höjd GF~h, samt zonens yta a , så är

..

Ty likasom uti föregående proposition det är bevist, att hela sphaerens yta, som beskrifves af halfcirkelns peripheri Ql\L . . . R, är lika stor med

kan det bevisas, att den del af sphaerens yta, som beskrifves af cirkelbagen imellan lineerna BG och CF, är lika stor med 27tR multipliceradt med den del af QR? nämligen GF, som svarar mot bågen BC.

Coroll 2. Den sphaeriska Calottens yta, som beskrifves af bågen imellan punkten Q, och lineen BG, är lika stor 2/iR.QG; så att om h är calottens höjd, och a hans buktiga, är a=2/iR.h, Tolfte Boken.

Proposition* Theorem*

of en sphcer , hvars radie är II,

lor

med -- .R3.

ö

Bevis. Om man f öreställer sig, att en polyeder är om skrifven omkring sphaeren, så att cirkeln GHMK. föreställer sphaeren, och månghörningen ABCDE föreställer den omskrifna po-lyetlren, hvars begränsande plan AB.BC . . . tangera sphaeren uti punkterna G, H . . .; så utgöres denna polve.dev af lika många pyramider, som polye-drc;n har gräns plan, och alla dessa pyramider hafva F till gemensam spets, samt lika stora höjder med sphaerens radie F.G. Om man derföre med A betecknar polyedrens hela convexa yta, och med K hans rymd; så måste

Låter man a vara sphaerens yta , a skillnaden imellan sphaerens och polyederns convexa ytor, k vara sphaerens rymd, och k' skillnaden imellan sphaerens och polyedrens rymder; så är A == a4 a , K = k + k ,

i PII i . i ' B. (a 4- a'),

och således . k -f- k = - -; - ~

eller

. B .a B.a' , f

\r -- J,. __ __ \l

k ---.«. 3 K.

Storheterna a', k' blifva mindre eller större, allteftersom polyedren är mer eller mindre mång-kantig; hvaremot storheten k, d. v. s. rymden af en gifven sphaer, omöjligen derigenom kan lida någon förändring. Alltså kunna a' och k' uti denna eqvation omöjligen under annat vilkor ingå, än att, för alla möjliga omkring sphaeren omskrifna polyedrar,

R.a

- k' = o;

hvilket gifver k ±= -^-.

Men emedan vi uti nästföreg. propo*. bevist, att a = 4;iR2; så måste

k --».H»; h. s. b.

o

C oroll. 1. Rymden af en sphcer hit Sector, CLANP, uti hvilken talotltns höjd AK~ h, är lika stor med

'"P '\

^

Ty likasom man uli föreg. propos, bevist, att hela sphaerens rymd är lika stor med hela sphaerens yta, multiplicerad ined en tredjedel af sphaerens radie; kan man bevisa, att sectorns rymd är lika stor ined den delen af sphaerens yta, som calotten LAN utgör, multiplicerad med en tredjedel af sphaerens radie. Men denna yta är 2/rR.h. (prop. 8. Cor. 2.), hvarföre sectorns rymd måste vara

Coroll. 2. Rymden af sphcerisha segmentet LANP, hvars höjd AK = A, Hr lika stor med

f (3R-h).

Ty då CN = R, och CK = R - h; så måste

KN = R*-(R-h)* = 2R.h-h2; och således rymden af conen CLNP vara

- (2R.h-h2).(R-h) = ^(2R2h-3Rh2+hs);

ö ' O

och då denna con subtraheras från sectorn ^.R2.h (coroll. 1.);

så återstår segmentets rymd, som således måste vara

Coroll. 3. Rymden af ett Sphaeriskt segment BDLN, som inneslutes af tvänne parallela plan, erhålles, om man subtraherar segmentet LdNP från segmentet D AB.

Tabell för beräkning af solida rymder

Gifna. Sökes.

Prisma

Bas = B

Höjd c H Rymd, K = B.H

Snedt afsk. Prisma.

Sid. a, b, c5 m, n Rymd, K m. n. a *Vb -f c

"2 3

Pyramid.

Bas ^ B j B TT

Höjd r. H Rymd, K . in. = ~3~

St. Pyramid.

Baser, a, b, Höjd =.H Rymd, K. = f (a-fKa.b + b)

Cylinder.

Radft = R 1 Rymd, K | = 7iH.R2

Höjd = H j Bukt. yta A = 2n HR

Con.

Radie = R

<w H n i

Höjd n H Rymd, K TÉ rl lv -1

3

Radie = R Buktig yta,

Sida = S A = n R.S.

St. Con.

Radier, R,r Höjd = H Rymd, K = ^(R2 + R.r+r*)

R,r ochsi- Buktig yta

dan = S A = S. (R+r)

Spha3r.

Radie = R Rymd, K 4» K'

3

Yta, A c4«R2

Sphaer. Segm.

Radie = R Rymd, K = ^(3R-H)

Höjd = H Bu. yta A = 2 n H.R.

304

Tolfte Boken.

Coroll. 2. Rymden af sphcerisha segmentet LANP, hvars höjd AK = A, Hr lika stor med

f (3R-h).

Ty då CN = R, och CK = R - h; så måste

KN = R*-(R-h)* = 2R.h-h2; och således rymden af conen CLNP vara

- (2R.h-h2).(R-h) = ^(2R2h-3Rh2+hs);

ö ' O

och då denna con subtraheras från sectorn ^.R2.h (coroll. 1.);

så återstår segmentets rymd, som således måste vara

Coroll. 3. Rymden af ett Sphaeriskt segment BDLN, som inneslutes af tvänne parallela plan, erhålles, om man subtraherar segmentet LdNP från segmentet D AB.

305

Tabell för beräkning af solida rymder

Gifna. Sökes.

Prisma

Bas = B

Höjd c H Rymd, K = B.H

Snedt afsk. Prisma.

Sid. a, b, c5 m, n Rymd, K m. n. a *Vb -f c

"2 3

Pyramid.

Bas ^ B j B TT

Höjd r. H Rymd, K . in. = ~3~

St. Pyramid.

Baser, a, b, Höjd =.H Rymd, K. = f (a-fKa.b + b)

Cylinder.

Radft = R 1 Rymd, K | = 7iH.R2

Höjd = H j Bukt. yta A = 2n HR

Con.

Radie = R

<w H n i

Höjd n H Rymd, K TÉ rl lv -1

3

Radie = R Buktig yta,

Sida = S A = n R.S.

St. Con.

Radier, R,r Höjd = H Rymd, K = ^(R2 + R.r+r*)

R,r ochsi- Buktig yta

dan = S A = S. (R+r)

Spha3r.

Radie = R Rymd, K 4» K'

3

Yta, A c4«R2

Sphaer. Segm.

Radie = R Rymd, K = ^(3R-H)

Höjd = H Bu. yta A = 2 n H.R.

Rättelser.

Sid, 5 rad. 7 nedifrån står: den gemensam- läs : de lika stora sidorna

ma sidan BC, EC och DB,

b och - b; och

- 5 - 7

- 19

hvarandra -

- 32 - 9 uppifrån- 2 axiom.

38-4 - - ~

hvarandra, l axiom. BC

- 58

14 ,- -

- 63 i tabellen -

- 82 rad. 5 nedifrån -

- 87 7 uppifrån - -- 93 - 3 nedifrån -

- 141 - 12 u ppi f rån - -144 -13 - . - -150 - 3 nedifrån -

- 20ii - 5 uppifrån -

- 213 - J) och l n, -

- 214 - 12 uppifrån -

- 215 - 5 -

- 238 - 4 nedifrån -

- 241 -14 uppifrån -

- 258 --» 11 nedifrån - -259 -- 9 uppifrån -

- 275 -. 2 nedifrån - - 285 - l - -

IIBE 4- HEB

I def.

II och 13 efgh

HL

___.3.IIEB

9 def> 9 och 11 efgb KL